Arts
and
Mathematics

Mathématique
et
Art

L'exposition illustre, dans leur modernité, les liens intimes qui n'ont jamais cessé d'unir

les Arts plastiques
à
*l'*Art mathématique

LISTE DES EXPOSANTS

François APÉRY
Boris ASSANCHEYEV
Philippe CHARBONNNEAU
Jean-François COLONNA
Jean CONSTANT
Patrice JEENER
Bahman KALANTARI
Jos LEYS
Sylvie PIC
Philippe RIPS
John SULLIVAN

This exhibit illustrates in a contemporary context the close relationship that has always linked Mathematic and Art

FOREWORD

Architecture or Music? Painting or Sculpture? Which of these arts would have contributed first to nurture the field of Mathematics, or, in reverse, which one would have drawn technique and inspiration from this intellectual art, well before its rivals?

Without any doubt, many a pleasant, knowledgeable and enthusiastic discussion will attempt to solve this issue. However one cannot ignore that in the course of history, the development of classical art has always been related to the mathematical field.

The Renaissance era abounds with examples of art created along with the re-discovery of the polyhedrons and the creation of the theory of the linear perspective. More than a few paintings and engravings of the time illustrate scientific projections and testify to the symbiosis between painting and mathematics. The famous engraving of Dürer, "Melancholy" (1513-1514) is rich in content and mathematical references. Luca Pacioli, the central character of the splendid painting of Jacopo de Barbari (museum of Naples), is a XV century mathematician and author of a famous essay illustrated by Leonardo da Vinci (Divine Porportione).

Differential Geometry, Topology and Algebra were introduced to the modern world in the XIX century as new mathematical objects were being created: Scherk's surface, Klein's bottle, Cayley's cubic, hyperbolic plan. Those are just some of the names of objects familiar to mathematicians today that were discovered then.

Almost a century had to pass before artists started to incorporate again some of these intellectual preoccupations into their work: Salvador Dali represented a hypercube in his painting; Mauritz Escher used the richness of tessellation of the hyperbolic plan. They are among some of the brilliant pioneers of this new form of expression.

1 This text is a revised version of the introduction to the first "Mathematic and Art exhibit. IHP 1-6. 2005

INTRODUCTION

Architecture ou Musique ? Peinture ou Sculpture ? Lequel de ces arts aurait, le premier, contribué à féconder les Mathématiques, ou bien, à rebours, aurait puisé dans cet art intellectuel et bien avant ses rivaux, techniques et inspiration ?

Sans aucun doute, d'agréables conversations, érudites et fort animées, contribueront à forger des réponses à ces questions. Le fait est que, dans le cours de l'histoire, le développement des arts classiques a été concomitant avec celui des mathématiques. Ainsi, l'époque de la Renaissance a été particulièrement féconde avec la redécouverte des polyèdres et la création de la théorie de la perspective linéaire. Les tableaux et gravures de ce temps sont nombreux qui illustrent ces avancées de la science, et témoignent de la symbiose entre peinture et mathématiques : souvenons-nous par exemple de la fameuse gravure au burin de Dürer intitulée « Mélancolie » (1513-1514), si riche par son contenu et par ses allusions, souvenons-nous aussi du magnifique tableau de Jacopo de Barbari (musée de Naples) : le personnage central en est Luca Pacioli, le mathématicien du XVième siècle auteur d'un ouvrage célèbre illustré par Léonard de Vinci, « Divine proportion ».

Le XIXième siècle développe la Géométrie différentielle, introduit la Topologie et l'Algèbre dans son sens moderne : de nouveaux objets mathématiques sont créés. Surface de Scherk, Bouteille de Klein, Cubique de Cayley, Plan hyperbolique, sont quelques noms d'objets familiers pour les mathématiciens, et que l'on découvre alors. Il faudra attendre un bon siècle pour que les artistes s'emparent de quelques-uns de ces objets ou de ceux de leurs familles. Salvador Dali, avec sa toile représentant l'hypercube, Mauritz Escher utilisant la richesse des pavages du plan hyperbolique font figure de pionniers géniaux.

1. Ce texte est une version un peu remaniée de l'introduction qui figure dans le catalogue de la première exposition « Mathématiques et Arts ». IHP, 1-6, 2005

Many new mathematical objects made their appearance in the course of the second half of the XX century following innovative development in the fields of knots and minimal surfaces. Interested readers may want to consult the site www isama.org where they will discover, maybe with some degree of surprise, a great number of artists, painters, sculptors and architects, who found inspiration for their works in this new mathematical universe.

The artists featured here reveal the astonishing diversity of these mathematical objects in original and unexpected forms of precise lines and perfect equilibrium and through the brilliance of their accomplishment and reputation, bring them to life in bright stone, sparkling metal, or in cheerful illustration of sharp and shimmering colors. Mathematical art today is contributing to renewal of visual art and there is no doubt that artists will continue to find inspiration in mathematical works.

"Mathematics and Art" among the first exhibit of this kind in recent times, hopes to pave the ground for further development in this collaborative effort, reaffirm the depth and dynamic of this endeavor and help reconcile the public with the universe of mathematic, whose image is often distorted by unfounded preconceived ideas.

The exhibition also carries an element of curiosity meant to encourage young people and mathematicians alike to explore further the specifics of their work's universe and passion, and to engage into new investigations.

One of the common features of many works shown here is the absence of immediate reference to familiar objects. Being the works of mathematician-artists it is hardly surprising. Visitors will be captivated by the evenness of their beauty while other will prefer the emotional attraction to familiar environments expended by the creative nature of imagination.

De très nombreux nouveaux objets mathématiques font leur apparition au cours de la seconde moitié du XXième siècle : les familles des noeuds et des surfaces minimales par exemple s'accroissent considérablement. Le lecteur pourra consulter le site www. isama.org où il découvrira, peut-être avec surprise, le très grand nombre d'artistes, peintres, sculpteurs ou architectes, qui ont trouvé la matière de leurs oeuvres dans cet univers mathématique récent.

Par la beauté de leurs réalisations, par leur renommée, ces artistes contribuent ainsi à faire connaître à tout un chacun des formes originales et inattendues, la pureté de leurs lignes, la perfection de leur équilibre, l'étonnante diversité de ces objets mathématiques, incarnés dans la pierre éclatante, dans le métal étincelant, ou révélés par le dessin, par le jeu des couleurs, gaies, vives et chatoyantes. L'art mathématique contribue ainsi à renouveler l'art plastique. Et nul doute qu'au fil du temps plus nombreux seront les artistes à trouver une part de leur inspiration auprès des oeuvres mathématiques. Cette exposition, parmi les premières dans son genre, en annonce sans doute d'autres dans le futur et dans la même veine.

Mais également, en dévoilant son étendue, en révélant le caractère très concret et fascinant de son contenu, une telle exposition contribue à réconcilier le public avec le monde mathématique, dont l'image reste encore souvent faussée par le jugement mal fondé. L'exposition présente aussi un intérêt de curiosité qui pourrait inciter de jeunes ou de moins jeunes mathématiciens à approfondir la connaissance de leur univers de travail et de passions, à engager de nouvelles recherches.

L'un des traits évidemment marquant d'un grand nombre d'oeuvres qui sont présentées est l'absence de référence immédiate aux objets familiers. Que ce soient les oeuvres des mathématiciens artistes en particulier n'est guère étonnant. D'aucuns seront acquis au caractère acéré de leur beauté. D'autres préfèreront peut-être des oeuvres plus chargées d'affects, où le monde sensible est présent, en même temps que s'y déploient les créations de l'imagination proprement humaine.

Most participants in this exhibition are mathematicians Francois Apery, Thomas Banchoff, Bahman Kalantari, John Sullivan as well as computer technology experts such as Jean Francois Colonna. Other still, fascinated by the mathematical universe translate it creatively from an artistic perspective: Philippe Charbonneau, Jean Constant, Patrick Jeener, Jos Leys, Philippe Rips, Sylvie Pic. Future museums will host their work, some as a reference other as relevant creation of a particular time in history

The mathematical origin of the pieces exhibited here is sometime clearly visible. Most deal with problems of modern geometry deriving from curve and surface theory, multiple extensions in space and topological properties.

In the previous Mathematics and Art exhibit, John Robinson exhibited the picture of a beautiful sculpture whose shape was a direct expression of an object mathematicians call a node, more precisely a clover node Curiously, the same node appears again this time, sometimes hidden sometimes very visible in the works of Philippe Rips and Jos Leys.
One of Leys most recent picture was selected for the cover of the January 2007 issue of the Notes of American Mathematical Society. The image was the result of collaboration with Etienne Ghys, a mathematician from Lyons and it relates to the representation of the movement, object trajectories and their evolution in the context of time; some of them are rolled up around the famous clover node.

Other works from Jos Leys, such as in the series of Indra' S Pearls, prepared for mathematicians David Mumford, David Wright and Caroline Series show us bright illustrations on variation of filling a disc with circles.

Si les exposants sont parfois également d'authentiques mathématiciens, comme François Apéry, Thomas Banchoff, Bahman Kalantari, John Sullivan, ou bien de grands connaisseurs de l'univers informatique comme Jean-François Colonna, il en est d'autres non moins fascinés par le monde des objets mathématiques, qu'ils nous révèlent en tant qu'artistes :ils ont pour noms Philippe Charbonneau, Jean Constant, Patrice Jeener, Jos Leys, Philippe Rips, Sylvie Pic. Les musées du futur abriteront leurs oeuvres premières, dont certaines resteront comme des références, au même titre que certaines des grandes créations du passé.

Les soubassements mathématiques des oeuvres sont parfois très distincts. Elles ont trait pour la plupart d'entre elles à la géométrie moderne, ici penchée sur la théorie des courbes et des surfaces, et sur celle de leurs extensions dans les espaces à plusieurs dimensions, sur leurs propriétés topologiques.

On a pu rencontrer, dans la première exposition, l'image d'une très belle sculpture de John Robinson, épurée, celle d'un objet que les mathématiciens appellent un noeud, en l'occurrence le noeud de trèfle. Curieusement, ce même nœud apparaît à plusieurs reprises, de manière cachée ou bien très visible comme parfois chez Philippe Rips et Jos Leys.
On doit à ce dernier une des plus récentes des images de couverture des Notices de l'American Mathematical Society, celle de Janvier 2007. Cette image, issue d'une collaboration avec le mathématicien lyonnais Etienne Ghys, se rapporte à la représentation des mouvements, des trajectoires que suivent les objets dans leur évolution au cours du temps ; elle montre certaines d'entre elles qui s'enroulent autour de ce fameux nœud de trèfle.

D'autres œuvres de Jos Leys, comme celles de la série des Indra's Pearls, également préparées avec et pour les mathématiciens américains David Mumford et David Wright ainsie pour Caroline Series, nous montrent d'éclatantes illustrations se rapportant aux nombreuses manières de remplir un disque avec des cercles.

This disc is also present in works of Jean Constant. One can see what becomes of the tiling of the hyperbolic plan, under the luminous glance and the imagination of an authentic and fertile artist. German mathematician Felix Klein first studied this figure at the end of the nineteenth century. Let us also admire the surprising and rich inspiration Jean Constant draws from one of the most important Platonic polyhedrons, the icosahedron.

Philippe Rips used this same icosahedron as a screen to conceive perfect five plans nodes reminding one of real propellers. All of Philippe's metal work relates to flexible, ant seismic geometry. One can fold it, twist it, crush it; it will regain its original shape as soon as the deformation stress is stopped.

Mathematicians - sometimes magicians - know how to turn elastic spheres without folding or tearing them: François Apéry and John Sullivan exhibit through sparkling metal sculpture of a completely original design or by an image packed with the manner of the tapestries, privileged moments of this reversal. The concept of extremality, which is not without a major link with the concepts of stability, optimality and symmetry, is very present in their achievements. So are as the images of soap bubbles of Sullivan, astonishing by returned transparency and light, or the static contemplation of Patrice Jeener's engraving who opposes the crispness of Provence (scene of Arpanon, hypercube, Boy surface) to the dynamic outlook of nature (olive-trees and minimal surfaces) A discipline in geometry, known as algebraic, focusing on the structural properties of mathematical objects, is represented here by one very elegant and luminous work by Philippe Charbonneau, which is based on a representation of the Moebius strip.

Ce disque est à nouveau présent dans les oeuvres de Jean Constant où l'on voit ce que deviennent, par le regard lumineux et l'imagination d'un artiste authentique et fécond, les pavages du plan hyperbolique, étudiés à la fin du dix-neuvième siècle par le mathématicien allemand Félix Klein. Admirons aussi le parti surprenant et riche que Jean Constant tire de l'un des polyèdres platoniciens parmi les plus importants, l'icosaèdre.

Ce même icosaèdre a servi de trame à Philippe Rips pour concevoir ces noeuds parfaits à cinq feuilles, qui font penser à des hélices ; toutes ses œuvres en métal relèvent également de la géométrie flexible, antisismique : on les plie, on les tord, on les écrase, elles reprennent leur forme initiale dès qu'on supprime les contraintes de déformations. Les mathématiciens, parfois un peu magiciens, savent retourner une sphère élastique sans la plier ni la déchirer : François Apéry et John Sullivan montrent par une sculpture métallique étincelante, d'une conception tout à fait originale, ou par une image étoffée à la manière des tapisseries, des moments privilégiés de ce retournement.

La notion d'extrémalité, qui n'est pas sans lien profond avec celles de stabilité, d'optimalité et de symétrie, est très présente dans leurs réalisations, comme dans ces images de bulles de savon de Sullivan, étonnantes par le rendu de la transparence et de la lumière, tout comme dans les gravures de Patrice Jeener, d'une clarté provençale, où la contemplation statique (vue d'Arpanon, hypercube, surface de Boy) s'oppose au regard dynamique (oliviers et surfaces minimales), par nature beaucoup plus vif et vivant. La géométrie dite algébrique, car elle fonde ses démonstrations sur les propriétés structurales des objets mathématiques, n'est pratiquement ici représentée que par une seule oeuvre, très élégante et lumineuse, celle de Philippe Charbonneau, basée sur une représentation du ruban de Möbius.

Thomas Banchoff and David Cervone dedicated most of their work for the last fifteen years to the fields of topology, geometry, the visualization of objects and phenomena in space of size sometimes higher than that of usual space - with often unusual forms. These visualizations and their intrinsic beauty are bound to stimulate artistic creativity and help mathematicians familiarize themselves with the contents of these spaces.

Jean-François Colonna carries out abundant visualizations for physicists and mathematicians. His archives contain more than two thousand mathematical works transformed into true works of art, some of which being already famous. Fascinating, they have been exhibited in many venues.

Lastly, to resolve a traditional problem and find the values of the unknown factor that cancel a polynomial, Bahman Kalantari extended a method already employed by Newton to a simple case. The algorithm is being rendered into fields, which can be colored. The visual results are sometimes attractive. The process is also playful and instructive.In those multiple examples, mathematic becomes a springboard for artistic investigation, which, gratefully, returns its support of mathematics.

The visitor leaving this exhibit will not fail to wonder about the reasons of artistic endeavor, as he will appreciate again its diversity of expression. I have not doubt one of the deepest motivations among many relates to the need, the will to seize our space and master it, which implies understanding it before representing it.

C.P. Bruter

De leur côté, Thomas Banchoff et Davide Cervone ont consacré ces quinze dernières années l'essentiel de leurs activités, dans les domaines de la topologie et de la géométrie, à la visualisation d'objets et de phénomènes présents dans des espaces de dimension parfois plus élevée que celle de l'espace usuel, et aux formes souvent inhabituelles. Ces visualisations, par leur beauté intrinsèque, ne peuvent que stimuler la créativité artistique, elles aident aussi les mathématiciens eux-mêmes à se familiariser avec le contenu de ces espaces.

Jean-François Colonna a également réalisé d'abondantes visualisations pour les physiciens et les mathématiciens ;son catalogue en contient plus de deux mille ; savamment retravaillées, retouchées, elles sont devenues de véritables oeuvres d'art, dont certaines sont déjà célèbres ; captivantes, elles ne cessent de faire chez nous l'objet de très nombreuses expositions.

Enfin, pour la résolution d'un problème classique, trouver les valeurs de l'inconnue qui annulent un polynôme, Bahman Kalantari a étendu une méthode déjà employée par Newton dans un cas simple. L'algorithme s'accompagne de la création de domaines que l'on peut colorier. Les résultats visuels sont parfois fascinants. Le procédé est également ludique et instructif. Dans tous ces exemples que nous venons de rencontrer, les mathématiques sont au service de l'art, qui, reconnaissant, vient épauler les mathématiques.

Au sortir de cette exposition, le visiteur ne manquera pas de s'interroger encore sur les raisons de l'activité artistique de l'homme dont on apprécie à nouveau la diversité des manifestations. Il n'est pour moi pas de doute que l'une des motivations parmi les plus profondes qui la sous-tend est, liée à la nécessité, la volonté de saisir l'espace, de le maîtriser, ce qui implique sa compréhension, fille aînée de sa représentation.

C.P. Bruter

APÉRY François
Mathematician
Former student of l' École Normale Supérieure de Cachan and lecturer at the University of Alsace, François Apery passed his thesis in differential topology under the direction of Bernard Morin . He is pursuing his research in geometry and in small dimension topology. Apery likes to realize objects and three dimensional figures of mathematical objects.

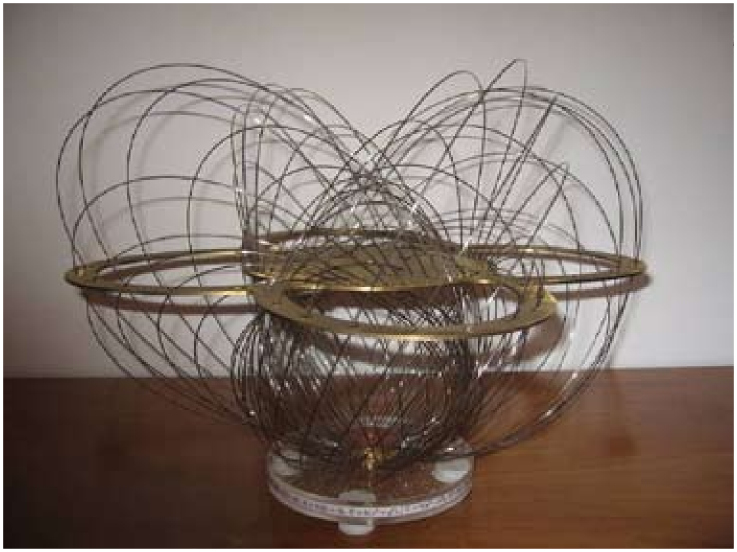
A quality extended to the surfaces generated by other families of curves starting with the conical ones like the ellipses, by using the mechanical properties of a metallic wire of piano wire type. Its elasticity results in the fact that it does not keep trace of the deformations it undergoes, provided the tension is not too important. A wire of given length subjected to constraints finds a position of balance materialized by a curve. If for example, one forces the ends to meet at a given point according to a flat angle representing four constraints, the position of equilibrium is a circle. If one can force the wire to pass by a second point of the plan of the circle and create a fifth constraint, the wire finds its balance as a plane curve which will be convex and not un-similar to an ellipse. It brings the idea to create a surface generated by ellipses using a frame on which steel wire are assembled and set to satisfy at least five conditions. As in "Surface reglees" the surface represented this way will give the impression to exist only virtually by the means of its apparent contours.

One should notice that those are stand-alone models created without screws, bolts or welding, and are entirely dismountable. One could project what a monumental construction it could become, knowing how much architecture draws from regulated surfaces. Those structures are waiting for their architect...

APÉRY François
Mathématicien
Ancien élève de l'École Normale Supérieure de Cachan, Maître de Conférences à l'Université de Haute-Alsace, a passé sa thèse sous la direction de Bernard Morin en topologie différentielle. Son centre d'intérêt touche à la géométrie et à la topologie en petites dimensions. Aime à réaliser des objets physiques, figures en trois dimensions d'objets mathématiques.

Est présentée ici la trame d'une surface qui occupe une place centrale dans le processus du retournement de la sphère : on la désigne sous le nom de Modèle central fermé ou de Surface de Morin. Le principe qui a présidé à sa réalisation repose d'une part sur la nécessité de représenter un objet géométrique aussi exactement que possible, c'est-à-dire en respectant fidèlement les données algébriques issues des équations qui le définissent, en jouant par ailleurs sur certains degrés de liberté pour accentuer les qualités esthétiques, même si elles restent subjectives. Parmi ces degrés de liberté, figure notamment le choix de l'échelle et des proportions, celui des matériaux.

C'est cette qualité que l'on veut étendre à des surfaces engendrées par d'autres familles de courbes, et pour commencer par des coniques comme les ellipses, en utilisant les propriétés mécaniques du fil métallique, notamment celles du fil d'acier du type corde à piano. Son élasticité se traduit par le fait qu'il ne garde pas la trace des déformations qu'il subit pourvu qu'elles ne soient pas trop importantes. Un fil de longueur donnée soumis à des contraintes prend une position d'équilibre que matérialise une courbe. Si on impose par exemple aux extrémités de se toucher en un point donné suivant un angle plat, ce qui représente quatre contraintes, la position d'équilibre est un cercle. Si maintenant on impose en outre au fil de passer par un second point du plan du cercle, ce qui fixe une cinquième contrainte, le fil prend comme position d'équilibre une courbe plane qui, dans le cas qui nous intéresse, sera convexe et peu différente d'une ellipse. D'où l'idée de construire une surface engendrée par des ellipses à l'aide d'un bâti sur lequel sont montés des fils d'acier astreints à satisfaire au moins cinq conditions. La surface représentée de cette façon donne, comme les surfaces réglées, l'impression de n'exister que virtuellement par le biais de ses contours apparents.
Ce qui est remarquable, c'est que le modèle tient tout seul sans visserie ni soudure, il est entièrement démontable. On imagine ce qu'une construction monumentale pourrait donner, surtout quand on voit ce que l'architecture a tiré des surfaces réglées. Une telle structure attend, me semble-t-il, son architecte.



The starting point is to demonstrate the construction of surfaces known as regulated. The displacement of rectilinear right-hand sides on these surfaces makes it possible to generate them entirely. The model of such type of surface is created by a frame intersected by wires materializing the generating lines and forms. One of the attractions of these models is that their surface is not carried out in its entirety, unlike opaque wood, plaster or even latticed models. Its surface appears often only by its apparent contour which seems to float in space a little like a hologram obtained by the reflection of the light.

L'idée de départ est de généraliser la construction des surfaces dites réglées : le déplacement de droites rectilignes sur ces surfaces permet de les engendrer entièrement. Un bâti, traversé de fils tendus qui matérialisent les droites génératrices, forme la trame d'une telle surface. L'un des attraits de ces modèles tient à ce que la surface, contrairement aux modèles solides en plâtre ou en bois, ou même grillagés, n'est pas réalisée matériellement dans son intégralité. Elle n'apparaît souvent que par son contour apparent qui semble flotter dans l'espace un peu comme une caustique obtenue par réflexion de la lumière.

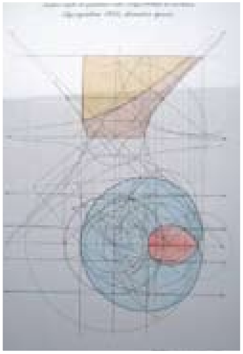
ASSANCHEYEV Boris

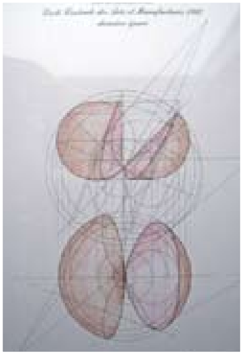
ASSANCHEYEV Boris

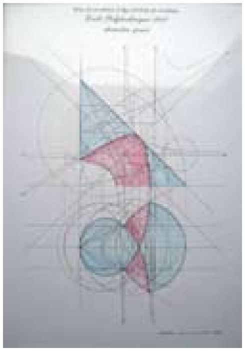
Ingénieur-Conseil

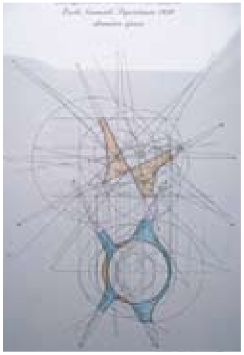
Né en 1938 à Paris, il a été Maître de Conférences à l’Ecole Nationale Supérieure des Ponts et Chaussées, Professeur à l’Ecole Spéciale des Travaux Publics, et ingénieur-conseil, notamment pour le calcul des structures. Il s’est passionné pour les épures de géométrie descriptive, une discipline qui figurait autrefois aux concours des grandes écoles scientifiques. Son ouvrage « Epures de Géométrie descriptive » publié aux éditions Hermann en montre 79 parmi celles qui ont servi d’épreuve au concours d’entrée à l’ENS. Leur dessin en a été réalisé par l’ordinateur.

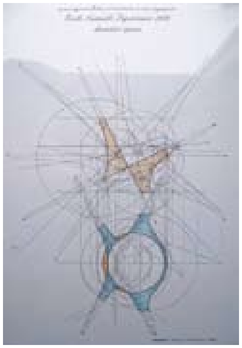
La géométrie dite « descriptive » a été introduite par Monge à la fin du dix-huitième siècle. Elle consiste à représenter un objet par ses projection sur un plan vertical (l’objet est vu de face) et sur un plan horizontal (une vue de dessus). Les objets traditionnels à représenter étaient pour la plupart des intersections de surfaces de rotation standard : plans, cônes, quadriques (ellipsoïdes dont la sphère, paraboloïdes et hyperboloïdes), tores.











BANCHOFF Thomas
Mathematician
Received his Ph.D. from the University of California, Berkeley, in 1964 under the direction of Prof. Shiing-Shen Chern. He was a Benjamin Peirce Instructor for two years at Harvard and one year as a Research Associate at the University of Amsterdam before coming to Brown University in 1967.
President of the Mathematical Ameriacn Association, year 1999-2000
He has been collaborating with computer scientists since 1968 investigating visualizations of phenomena in three- and four-dimensional space. In 1978, his film "The Hypercube: Projections and Slicing" with Computer Scientist Charles Strauss was awarded the Prix de la Recherche Fondamentale at the International Festival of Scientific and Technical Films in Brussels. He was invited to give the first presentation of computer animated geometric films at the International Congress of Mathematicians in Helsinki in 1978.
http://www.math.brown.edu/TFBCON2003/art/wecome.html
http://www.math.union.edu/~dpvc/professional/brief.html

The following images reactualised by Davide Cervone, were created by Huseyin Kocak, Fred Bisshopp, David Laidlaw, David Margolis, et Thomas Banchoff.

BANCHOFF Thomas
Mathématicien
Ph.D. de l'University of California, Berkeley, en 1964, sous la direction de Shiing-Shen Chern. Benjamin Peirce
Instructor pendant deux ans à Harvard, puis Research Associate à l'Université d'Amsterdam pendant un an avant de rejoindre Brown University in 1967.
Président de la Mathematical American Association pour l'année 1999-2000.
Il a travaillé avec des informaticiens depuis 1968, pour visualiser des objets et des phénomènes dans les espaces à trois et quatre dimensions. En 1978, son film «The Hypercube: Projections and Slicing», réalisé avec l'informaticien Charles Strauss, reçut le Prix de la Recherche Fondamentale au Festival International du Film Scientifique et Technique à Bruxelles. La même
année, l'invitation à donner une conférence au Congrès International de Mathématiques d'Helsinki lui permit de projeter le premier film réalisé sur ordinateur montrant des animations géométriques.
http://www.math.brown.edu/TFBCON2003/art/welcome.html
http://www.math.union.edu/~dpvc/professional/brief.html

Mises sous la forme présente par Davide Cervone, les images qui suivent furent créées au début des années 1980 par Huseyin Kocak, Fred Bishopp, David Laidlaw, David Margolis, et Thomas Banchoff.

About Z-Square Tetraview

Two of three "Tetraviews", each showing an assembly of five images, two smaller squares partially obscured by opposite corners of a large central square, which has its other two corners partially obscured by two squares of medium size. The display is inspired by the work of the artist Hans Hofmann, who began in the Bauhaus School. The five images are different views of a single surface in four-dimensional space, and the four corners show projections into the four coordinate hyperplanes. The dominant fifth image is in equilibrium, in a real sense the average of the other four. The ability to navigate between any two of these views is crucial for the understanding of the surface, according to the article "Understanding Complex Function Graphs" by the authors in the prototype volume of the totally electronic journal Communications in Visual Mathematics, sponsored by the Mathematical Association of America and the National Science Foundation.

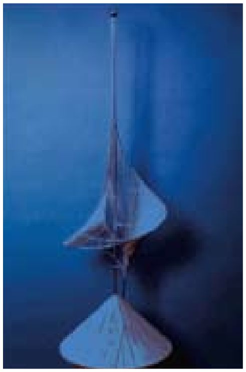
Z-Squared Necklace
Cette image montre cinq vues partielles d'une surface située dans l'espace à quatre dimensions. La surface est définie à partir de la simple équation $w = z^2$ où w et z sont des nombres de Chuquet-Cardan, également appelés nombres complexes. Les photographies de la surface ont été prises à partir de cinq points d'observation différents. On trouvera sur le site des auteurs des vues animées de la surface et une explication mathématique plus détaillée. (T.B.)

Z-Cube Necklace
Cette image montre cinq vues partielles d'une surface située dans l'espace à quatre dimensions. La surface est définie à partir de la simple équation $w = z^3$ où w et z sont des nombres de Chuquet-Cardan, également appelés nombres complexes. Les photographies de la surface ont été prises à partir de cinq points d'observation différents. On trouvera sur le site des auteurs des vues animées de la surface et une explication mathématique plus détaillée. (T.B.)

CHARBONNEAU Philippe
Draughtsman, architect
Philippe Charbonneau was in 1936 in Vendée. After a professional career of draughtsman in architecture, he began his research in the field of space and geometry to extend and enrich his former architectural activities with a distinct attraction for monumental realizations. His research are directed mainly towards regulated surfaces of the third degree or paradoxical as the Möbius strip. All curves, they are somehow always generated by lines. From simple principle, they determine complex forms and volumes which destabilize and enrich our direction in space. Concepts as banal as faces, above, below, interior, outside, can lose in it their ordinary meaning.

CHARBONNEAU Philippe
Dessinateur
Né en 1936 en Vendée. Après une carrière professionnelle de dessinateur-projeteur en architecture, j'ai entrepris des recherches plastiques dans le domaine de l'espace et de la géométrie un peu pour prolonger et enrichir mes activités architecturales antérieures, avec d'ailleurs une ambition avouée pour des réalisations monumentales. Mes recherches sont principalement orientées vers les surfaces réglées du troisième degré. Au même titre que le ruban de Möbius par exemple, ces surfaces sont paradoxales. Toutes en courbures, elles ne sont cependant engendrées que par des droites. D'un principe simple, elles déterminent des formes et des volumes complexes qui déstabilisent et enrichissent notre sens de l'espace. Des notions aussi banales que faces, dessus, dessous, intérieur, extérieur, peuvent y perdre leur sens habituel.

Biconic 2



Biconique 2
Surface réglée du troisième degré, limitée par deux cônes concentriques aux sommets opposés. Acier chromé

Untitled

Sans titre
Surface réglée du troisième degré, par inclusion dans une boule de résine de polyester

This sculpture consists of two elements built the same way. They are generated by a line that pulls on a directing circle, makes a full rotation on this circle, and at the same time makes a half-turn on its point of support in the plan of the axis of the same circle. The two elements have a common axis and can turn independently around the axis: it is a free union. They can also be put in phase and coincide on all their conical side. The two forms join and complete each other to create a new more elaborate and complex form: this is the perfect love!

Cette sculpture est constituée de deux éléments construits de la même façon. Ils sont engendrés par une droite qui s'appuie sur un cercle directeur, fait un tour complet sur ce cercle, et en même temps fait un demi-tour sur son point d'appui dans le plan de l'axe du même cercle. Les deux éléments ont un axe commun, et peuvent tourner indépendamment autour de cet axe : c'est une union libre. Mais ils peuvent aussi de mettre en phase et coïncider sur tout leur côté conique. Les deux formes s'épousent et se complètent pour créer une autre forme plus complexe et plus riche : c'es l'amour parfait !

COLONNA Jean-François

Software engineer Doctor in Sciences, chief engineer at France Telecom R&D, Jean François Colonna is presently doing researches on Scientific Calculation, Software development and Scientific Visualization at at the Center for Applied Mathematics of the French Ecole Polytechnique. The main body of his work focus on the concept of Virtual Experiment and consists of carrying out experiments on mathematical models of existing systems. It requires to guarantee the quality of all necessary operations in particular in regards of the level of programming, calculation and visualization. He is the author of several articles on the subject. His internet site http://www.lactamme.polytechnique.fr/ gives a large overview of his work and is also a place of meeting between Art and Science. The site is not only a place where Science offers to Art innovating tools of expression but also place where Art gives Science inspiration in the fields of perception and representation. Fractal geometry allows the study of natural objects (or not) which, until a recent past, escaped from any mathematical description. One their fundamental properties is their similarity at all the levels of observation on a scale factor as they are identical to themselves. This property can be satisfied in a perfect way only in mathematical objects created for the occasion. For fractals objects in nature, this is only statistically true, as it works only in scales of finished numbers .

COLONNA Jean-François
Informaticien
Docteur es-Sciences, ingénieur en chef à France Télécom R&D, il est détaché au Centre de Mathématiques Appliquées de l'École Polytechnique où il mène des recherches sur le Calcul Scientifique, le Génie Logiciel et la Visualisation Scientifique. L'ensemble de ses travaux débouche sur le concept d'Expérience Virtuelle, consistant à réaliser des expériences, non pas sur un système, mais sur son modèle mathématique. La qualité de l'ensemble des opérations alors nécessaires doit alors être garantie, en particulier au niveau de la programmation, du calcul et de la visualisation.
Il est l'auteur de très nombreux articles sur ces sujets, son site Internet http://www.lactamme. polytechnique.fr/ en est une synthèse. Ce site est de plus un lieu de rencontre entre l'Art et la Science, lieu où la Science offre à l'Art non seulement des outils d'expression innovants mais aussi de nouvelles «natures mortes», et où l'Art donne à la Science des conseils quant à la perception et aux représentations.

La géométrie fractale permet l'étude d'objets naturels (ou non) qui, jusqu'à un passé récent, échappaient à toute description mathématique. Une de leurs propriétés fondamentales est l'auto-similarité selon laquelle ces objets sont, à un facteur d'échelle près mais à tous les niveaux d'observation, identiques à eux-mêmes. Cette propriété n'est satisfaite de façon parfaite que pour des objets mathématiques créés pour l'occasion ; pour ce qui est des objets fractals de la nature, cela n'est évidemment vrai que statistiquement, et pour un nombre fini d'échelles.(JFC)

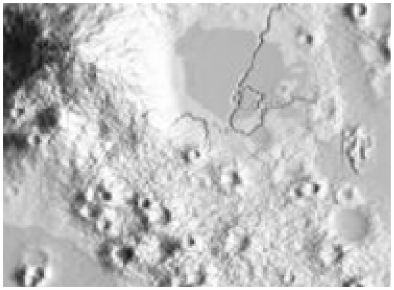
Monument Valley au coucher de soleil, 1997. *In this image, there are two types of fractals: clouds and mountains. To define the later, supposing there is no overhangs, one gives to each point an altitude Z {X,Y} on a reference plane, with a function Z (X,Y) which translates the property of auto-similarity mathematically. Used directly, it would give rise to a relief of the alpine type. But it is possible to transform the values it produces: this is the case here where only the low and high altitudes were preserved in order to simulate the relief's characteristic of Monument Valley (Utah, USA). The colors selected were natural and the lighting corresponds to that of a sunset.*

Monument Valley au coucher de soleil, 1997
Dans cette image, deux types d'objets fractals se côtoient : les nuages et les montagnes. Pour définir ces dernières, en supposant l'absence de surplombs, il suffit de donner l'altitude Z en chaque point {X,Y} d'un plan de référence, par l'intermédiaire d'une fonction Z(X,Y) (pour en savoir plus à son sujet -en anglais-) qui traduit mathématiquement la propriété d'autosimilarité. Utilisée directement, elle donnerait naissance à un relief de type alpin. Mais il est possible de transformer les valeurs qu'elle produit : c'est le cas ici où seules les basses et les hautes altitudes ont été conservées afi n de simuler les reliefs caractéristiques de Monument Valley (Utah, USA), les couleurs choisies étant naturelles et l'éclairage correspondant à celui d'un coucher de soleil.

Tour de Babel dans le brouillard, 1997

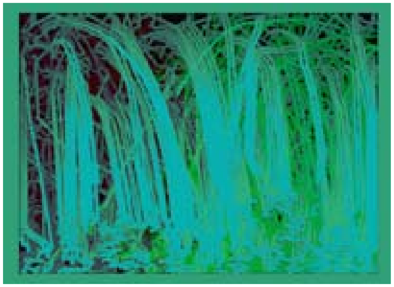
COLONNA

La montagne mystérieuse au lever du Soleil,1998



L'anomalie de Botticelli sur la Lune, 1998
Synthèse fractale de surface de la Lune, avec insertion d'un relief issu du printemps de Botticelli – au milieu et à droite – destinée à masquer la nature artificielle de cette image

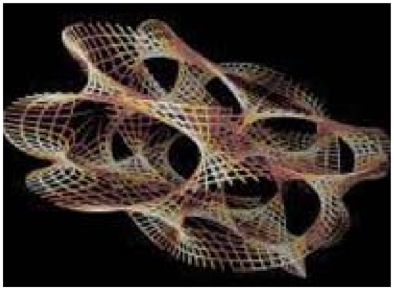
The magic forest 2001
A (two-dimensional) rectangular vertical box immersed in a field of gravitation contains massive particles. Initially, they fill the box uniformly; their speeds are random in direction, constants in module. Where the field of gravitation attracts them downwards, they can strike the walls or shocked each other. At the time of these shocks, half of the particles (initially selected randomly) can stick to each others (they appear in white) as the others rebound). Gradually, the white particles form an fractal aggregate above the lower wall of the box. The other colored particles, either stay free inside the box, or are trapped by the aggregate box. The curves show the trajectories of each particle since the initial fractal moment.



Dans la forêt magique, 2001
Une boîte rectangulaire (bidimensionnelle) verticale, immergée dans un champ de gravitation, contient des particules massives. Initialement, elles remplissent uniformément la boîte ; leurs vitesses sont aléatoires en direction, constantes en module. Alors que le champ de gravitation les attirent vers le bas, elles peuvent frapper les parois ou s'entrechoquer. Lors de ces derniers chocs, la moitié des particules (choisies initialement au hasard) peuvent se coller les unes aux autres (elles apparaissent en blanc) alors que les autres rebondissent). Progressivement, les particules collantes blanches forment un agrégat fractal au-dessus de la paroi inférieure de la boîte. Les autres particules, colorées, sont soit libres à l'intérieur de la boîte, soit piégées par l'agrégat fractal. Les courbes montrent les trajectoires de chacune des particules depuis l'instant initial.

La danseuse d'Yr'-, 2006
Un ensemble de Julia dans le corps des quaternions calculé pour c=(0,1,0,0)

COLONNA

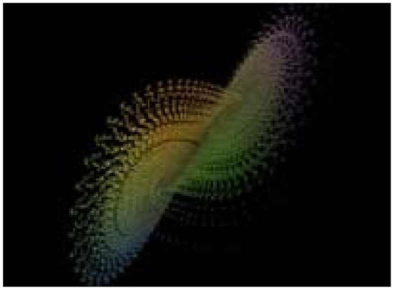


Représentation tridimensionnelle d'une variété quadridimensionnelle de Calabi-Yau, 2002

Une importante théorie moderne des particules élémentaires représente celles-ci par des fils, par des cordes. Cette théorie fait appel à des objets géométriques situés dans des espaces de grande dimension. Les « variétés de Calabi-Yau » sont de tels objets. On voit ici une vue d'artiste de la section de l'une de ces variétés dans l'espace usuel à trois dimensions.

Eclats, 1996

Synthèse de textures géométriques bidimensionnelles grâce à la superposition de 128 champs aléatoires filtrés puis symétrisés (JFC)

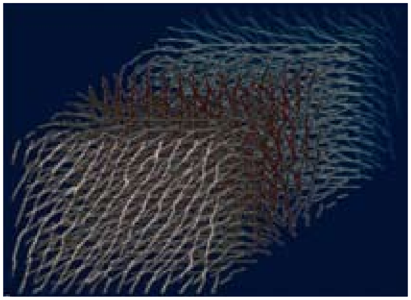


Lorenz, 1992

L'attracteur de Lorenz, issu d'un modèle simplifié d'une évolution météorologique, désigne un ensemble de trajectoires dans l'espace usuel à trois dimensions, telles qu'on les voit figurer dans une image de Jos Leys. Dans l'image présente, est représentée la trajectoire partant du point arbitraire (0.01, 0.01, 0.01). «Ici, la couleur n'a pas une simple valeur artistique ; elle est porteuse d'une information pertinente : les intensités des trois couleurs fondamentales (le Rouge, le Vert, le Bleu) sont respectivement proportionnelles aux trois composantes de la vitesse d'évolution du phénomène. (JFC) »

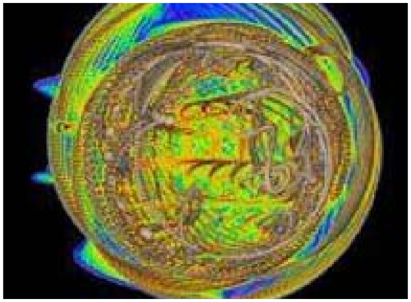
Synthèse fractale d'une structure spongieuse tridimensionnelle, 1998

COLONNA

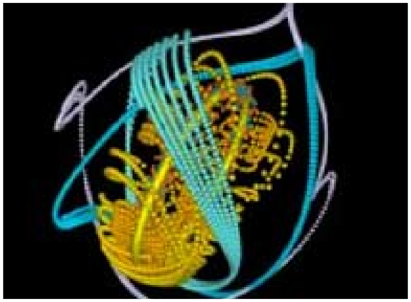


Vue artistique de l’intégration tridimensionnelle de la rotation de la phase de la transformée en ondelettes d’un champ fractal bidimensionnel, 2003

L’analyse en ondelettes est un outil mathématique récent qui prolonge les travaux de Fourier, en permettant tout à la fois une analyse locale et à différentes échelles d’un signal multidimensionnel non nécessairement périodique. Cette image résulte de l’étude d’un champ fractal bidimensionnel à l’aide d’une ondelette de Morlet d’échelle 0.06, pour 512 phases différentes (de 0 a 2pi) et dont ne sont conservés que les arguments résultants. Ces derniers sont empilés les uns derrière les autres, donnant ainsi naissance à cet «objet» tridimensionnel (JFC).



Visualisation artistique du système solaire vu depuis une planète virtuelle, 1996.



Le système solaire avec une planète virtuelle bleue sombre -point de vue de la planète virtuelle, 2003

Dans un référentiel pour lequel le Soleil est à l’origine des coordonnées, les neuf planètes décrivent des trajectoires quasiment elliptiques. Par contre, vues depuis la Terre, ces dernières semblent plus complexes et présentent des boucles de rétrogradation ayant conduit, avant la révolution copernicienne, aux épicycles de Ptolémée. Cette image présente le ciel vu par les habitants d’une planète virtuelle située deux fois moins loin que Pluton et dans un plan pratiquement perpendiculaire à celui de l’écliptique (sa vitesse initiale est alors déterminée grâce à la troisième loi de Képler). Les trajectoires apparentes des neuf planètes réelles semblent désordonnées, voire chaotiques (seule celle du Soleil se distingue des autres, l’astre du jour étant situé au foyer des ellipses képleriennes). Cela conduit à la notion de chaos virtuel et montre de plus que, pour certains systèmes, les notions d’ordre et de désordre peuvent être des notions relatives. Enfin, quelles sciences, quelles philosophies et quelles religions auraient pu développer ses habitants ? (JFC)

CONSTANT Jean
Public Art Consultant, artist.
Born in Paris and lives today in Los Alamos, New Mexico. His personal research relates to the poetic visualization of the mathematical world, defining means to bring closer the two disciplines of Art and Science and to engage the debate both with the scientific community and the public at large.
He is also very active in the promotion of arts as a consultant in visual art, producer and host of TV series on visual arts, film and contemporary international culture.

For the last five last years, he developed a regular correspondence with mathematician Richard Palais, creator of the program 3d-Filmstrip and 3DMathex, and with several members of the Mathxplor-I group in pursuing further collaboration between mathematicians and artists.

Jean Constant believes that the role of the professional artist today is not only to recognize the heritage of a common cultural past but to help with the integration of art in modern life and develop a new esthetic for future generations. http://www. hermay.org/jconstant

The following series is a poetic attempt at expressing the inherent beauty of the highly conceptual field of mathematics. This undertaking represents several years of experimentation with a unique algorithm visualization program. More than an interpretation of the vocable and specificity of a particular discipline, it is intended to be a celebration of the intrinsic radiance of the mathematical discourse.The random combination of shapes and colors belonging to an exclusive but challenging language are meant to provide the viewer with an entertaining aesthetic experience and to incite further appreciation of a universe built upon the contribution of numerous brilliant and dedicated minds.

CONSTANT Jean
Artiste, Public Art consultant
Artiste plasticien, né à Paris en 1949, vit présentement à Los Alamos au Nouveau-Mexique. Ses recherches personnelles qui ont reçu de nombreuses récompenses portent sur une visualisation poétique du monde mathématique, répondant à un besoin de rapprocher plus avant ces deux disciplines et d'engager le débat avec la communauté scientifique et avec le grand public.
Il est aussi très actif dans la promotion des arts en tant que consultant en art plastique, producteur de séries télévisées sur les arts visuels, les films et la culture internationale,.
Il enseigne également la technologie de fabrication des images et des publications électroniques au Northern New Mexico College.
Depuis ces dernières années, il a poursuivi une correspondance régulière avec le mathématicien Richard Depuis ces dernières années, il a poursuivi une correspondance régulière avec le mathématicien Richard Palais, créateur du programme 3D-Filmstrip et 3D-XM, et avec plusieurs membres du groupe Mathxplor-I qui continuent d'enrichir une collaboration fructueuse entre mathématiciens et artistes visuels. Jean Constant croit fermement que le rôle de l'artiste professionnel n'est pas simplement de reconnaître l'héritage d'un passé culturel commun mais également d'aider à l'intégration de l'art dans la vie moderne, et de développer un nouveau discours esthétique pour les générations futures.
http://www.hermay.org/jconstant

Les oeuvres présentées ici sont des éléments d'un essai poétique sur la beauté inhérente au domaine hautement conceptuel des mathématiques. Sa mise en forme s'étale sur plusieurs années de recherches à partir d'un programme original de visualisation d'algorithmes. Plus qu'une interprétation littérale du vocabulaire et de la spécificité de cette discipline particulière, ces images relèvent d'un parcours dont le modeste objectif est d'être une célébration de la radiance intérieure du discours mathématique. Les juxtapositions spontanées de formes et couleurs, qui appartiennent au langage complexe et exclusif de cette science, ont pour but d'apporter au spectateur un plaisir esthétique et visuel, et d'encourager plus avant l'appréciation des nombreux et brillants esprits qui se sont dévoués à explorer cet aspect de notre culture. J.C. (Texte du premier catalogue)

Pavages hyperboliques : une exploration mathématique & culturelle

(voir en annexe la fiche intitulée « Sur la série hyperbolique de Jean Constant»)

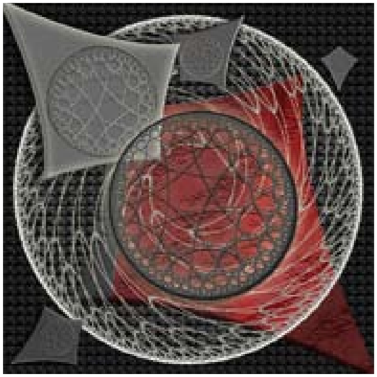
J'ai créé ces tableaux à partir des patrons de pavages hyperboliques réalisés par Bernie Freidin sans aucune idée préconçue sur ce à quoi ils pouvaient correspondre – laissant le flot de ces modèles géométriques guider mes décisions. Ces imprégnations et interférences illustrent à nouveau ce fait, aussi puissant qu'inattendu a priori, de l'insertion profonde de la géométrie dans tous les aspects de la culture et de la civilisation, en même temps que sa beauté et son harmonie continuent à influencer nos manières d'apprécier la nature et notre environnement.(J.C.)
(cf en annexe le texte intitulé sur la série hyperbolique).

CONSTANT

Zillij style tiling - (Early medieval Morocco)
7-triangles - Poincaré tiling - with thickened edges

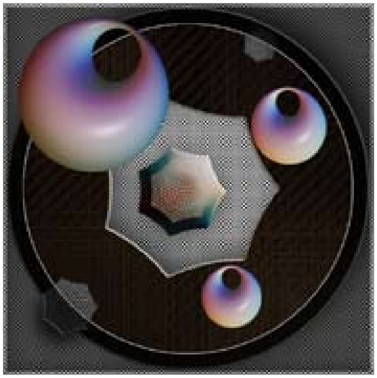
Pavage Zillij
Pavage de Poincaré à 7 triangles avec épaissisement des arêtes

Eiffel variation
Hyperbolic equivalent of an icosidodecahedron. In this wireframe tiling, each vertex is surrounded by two pentagons and two triangles.



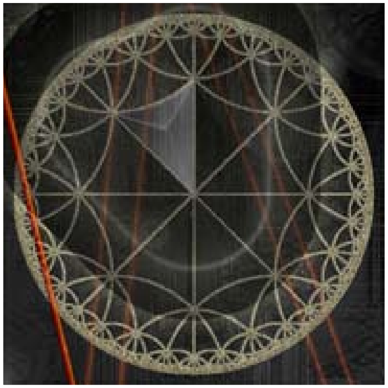
Variation sur le theme de Eiffel
Equivalent hyperbolique d'un icosidodécahèdre. Dans le patron de ce pavage, chaque sommet est entouré de deux pentagones et de deux triangles

KInetic convergence
Seven equilateral triangles subdivided uniformly in hyperbolic space.



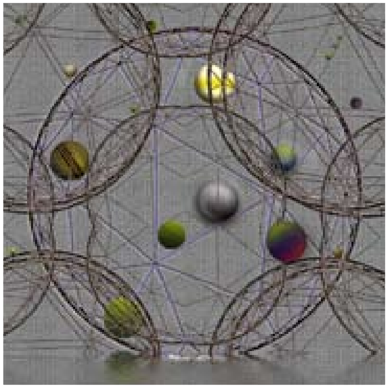
Convergence kinetique
Sept triangles équilatéraux et uniformément subdivisés dans espace hyperbolique

CONSTANT



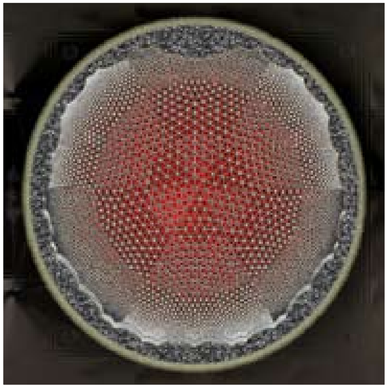
The crossing of Amherst.
Hyperbolic tiling with 7 equilateral triangles meeting at each vertex. Here the tiling is aligned to the center with 8 triangles meeting at a vertex.

The passage d'Amherst
Pavage hyperbolique, ici 8 triangles se rencontrent en chaque sommet



B.Balls
Analogous construction in hyperbolic space

B.Balls
Pavage hyperbolique.

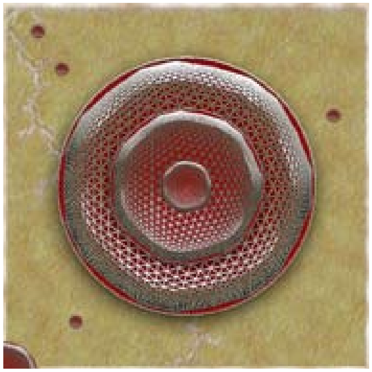


Nuclear threat,
Variation of an hyperbolic tiling with 7 equilateral triangles meeting at each verte

Menace nucleaire
Variation d'un pavage hyperbolique. 7 triangles se rencontrant en chaque sommet

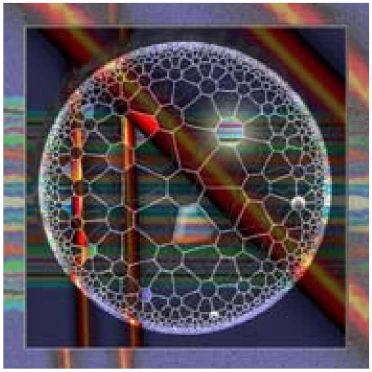
CONSTANT

Industrial age.
Hyperbolic geodesic dome under Klein projection.



L'age industriel
Dôme hyperbolique subdivisé par des géodésiques en projection de Klein

The world cup
Hyperbolic tiling where each vertex is surrounded by a 7-gon and two hexagons.



La coupe du monde
Pavage hyperbolique, chaque sommet est adjacent à un pentagone et à deuxhexagones

Futurism.
Klein projection of hyperbolic tiling. In the Klein projection, straight lines in hyperbolic space are seen as straight lines, but angles are distorted by the projection.

Futurism

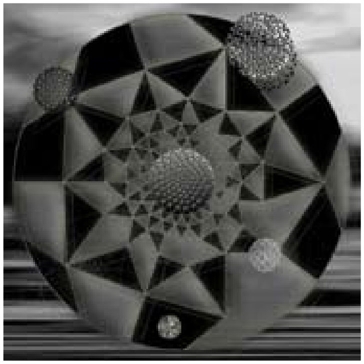
Pavage du plan hyperbolique selon la représentation de Klein.
Cette représentation ne conserve pas les angles.

Les « icosaèdres géodésiques » de Jean Constant

(Voir en annexe le texte intitulé « A propos de la série des « icosaèdres géodésiques » de Jean Constant)

The origin of Nature
Spherical tiling of an icosahedron subdivided into a geodesic dome. The projection is stereographic and clamped to a radius of 5 units.

The origin of Nature
Projection stéréographique d'un pavage sphérique d'un icosaèdre subdivisé en un dôme géodésique.



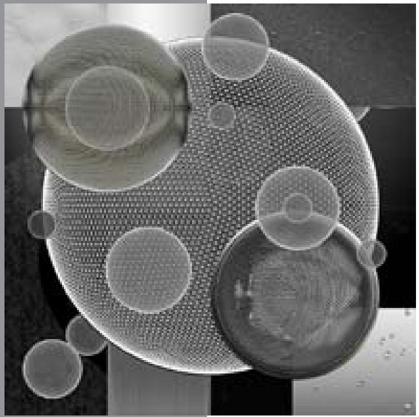
Praire quilters
Spherical tiling of an icosahedron subdivided into a geodesic dome. The projection is stereographic and clamped to a radius of 5 units.

Praire quilters
Projection stéréographique d'un pavage sphérique d'un icosaèdre subdivisé en un dôme géodésique.

Sangaku
Spherical tiling of an icosahedron subdivided into a geodesic dome. The projection is stereographic and clamped to a radius of 5 units.

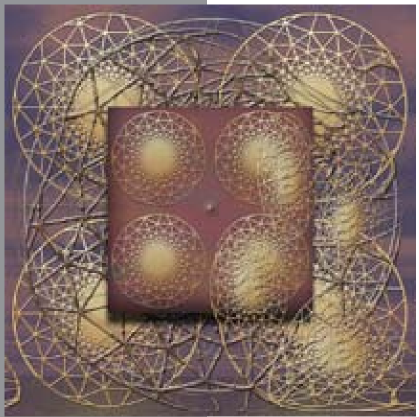
Sangaku
Pavage sphérique d'un icosaèdre subdivisé en un dôme géodésique.

CONSTANT



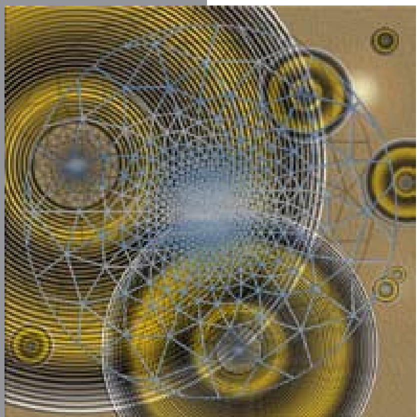
Modern Construct
Spherical tiling of an icosahedron subdivided into a geodesic dome.

Construct moderniste
Pavage sphérique d'un icosaèdre subdivisé en un dôme géodésique.



The nine chapters of the Mathematical Arts
Spherical tiling of an icosahedron subdivided into a geodesic dome.

Les neuf chapitres des arts mathématiques
Pavage sphérique d'un icosaèdre subdivisé en un dôme géodésique.



Forgotten dreams
Spherical tiling of an icosahedron subdivided into a geodesic dome #2.

Rêves oubliés
Pavage sphérique d'un icosaèdre subdivisé en un dôme géodésique.

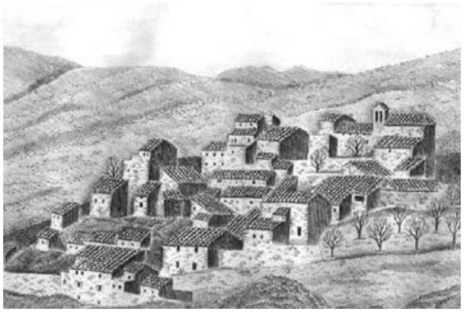
JEENER Patrice
Artist,copper engraver
Patrice Jeener studied engraving at the Beaux Arts school in 1963. Already influenced by the engravings of Escher and Flake’s treaty on curvilinear perspective, he discovered at the Palais de la Decouverte and the Institute Henri Poincaré models of mathematical functions made out of plaster that he decided to use as inspiration. He later studied mathematics as an autodidact.
He currently seeks to represent in his engravings the many remarkable mathematical models and their developments in particular fields of physics.

Patrice resides at La Motte Chalancon, a picturesque village of Provence between Vercors and Baronnies.

JEENER Patrice
Artiste
Entre en 1963 à l’École des Beaux Arts dans l’atelier de gravure au burin Déjà influencé par les gravures de Escher et le traité de Flocon sur la perspective curviligne, il découvre au Palais de la Découverte et à l’Institut Henri Poincaré des modèles de fonctions mathématiques en plâtre et décide de s’en inspirer. Il étudie alors les mathématiques en autodidacte.
Il cherche actuellement à représenter en gravures les nombreux modèles remarquables qu’offrent les mathématiques et leurs développements dans certains domaines de la physique.

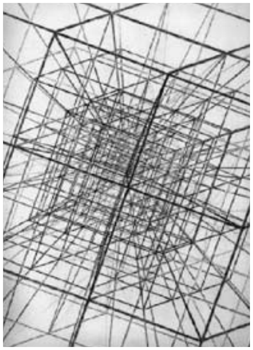
Patrice réside à La Motte Chalancon, charmant village de la Drôme Provençale, entre Vercors et Baronnies.

Arpavon près de la La Motte Chalancon



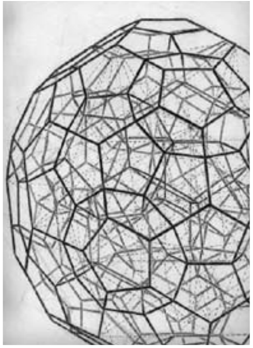
Arpavon près de la La Motte Chalancon

Hypercube tessellation
One can tessellate an hypercube in a 4 dimensions space. The representation here is a projection from 4 to 3 dimensions according to the traditional rules of perspective.



Pavage d’hypercube
On peut paver l’hypercube dans l’espace à 4 dimensions.
La représentation est, ici, une projection de 4 à 3 dimensions selon les règles de la perspective classique.

JEENER

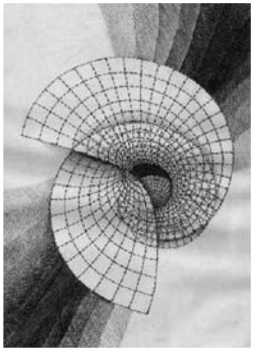


C120
The 4 dimensions space contains 6 regular polytopes . One of them is composed of 120 dodecahedric cells. The projection here is orthogonal.

C120
Il existe dans l'espace à 4 dimensions, 6 polytopes réguliers. Le C120, l 'analogue du dodécaèdre présent dans l'espace usuel, est composé de 120 cellules également dodécaédriques. La projection est ici orthogonale. (Voir également l'image réalisée par John Sullivan, « 119 Bubbles »)

Provencal olive tree
The charm of an olive-trees is often optimal!

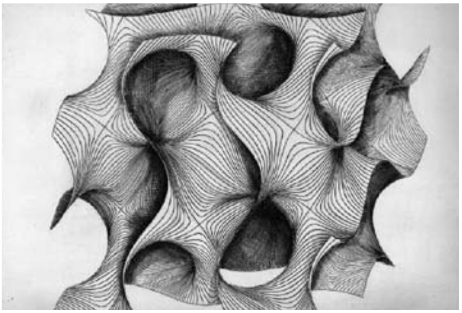
Olivier provençal
Le charme des oliviers est souvent optimal



Minimal surface.
The symmetry plane of this spiral and minimal surface contains a logarithmic curve.

Surface minimale spirale
Le plan de symétrie de cette surface spirale et minimale contient une courbe logarithmique.
(cf en annexe le texte intitulé « surfaces minimales »)

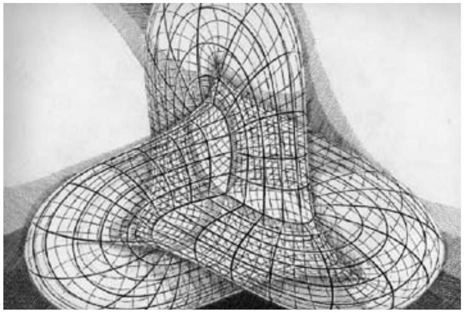
JEENER



Gyroïde
This spiral and minimal surface contains a curve logarithmic. This minimal surface discovered by Schoen has 3 periods and no straight line.

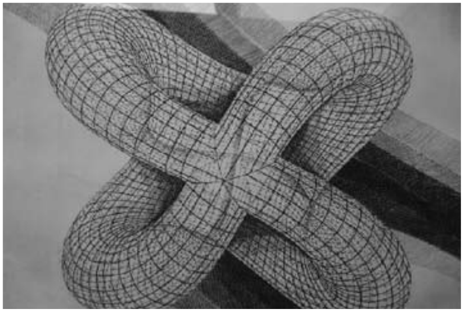
gyroïde

*Cette surface minimale découverte par Schoen est à 3 périodes
et ne possède aucune droite.*



Boy surface
Discovered in 1902, this surface of the same topological characteristic that the sphere has only one face, making possible the reversal of the sphere.

Surface de Boy
Découverte en 1902, cette surface, ayant même topologie que la sphère, ne possède qu'une seule face, d'où son rôle dans le retournement de la sphère



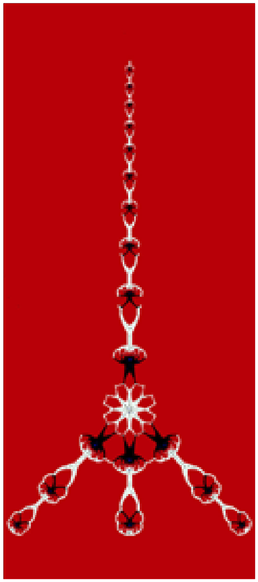
Morin surface
Etching (cf metal model of François Apéry)

La surface de Morin
Ici en gravure (cf la représentation métallique de François Apéry)

KALANTARI Bahman
Mathematician
Bahman Kalantari is an Associate Professor of computer science at Rutgers University since 1984. His research interests include theoretical information, mathematical programming and techniques for the visualization of polynomial root-finding which he calls polynomiography, an interdisciplinary field with numerous applications in art, science, and education.

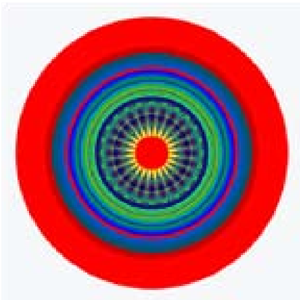
My images are based on Polynomiography, a novel and powerful mathematically-based visual medium that could help bridge art and math and is of tremendous artistic and educational potential. Polynomiography is a by-product of many years of my theoretical research into the ancient but historically significant problem of solving polynomial equations, a problem dating back to Sumerians and Babylonians. Through Polynomiography one can create spectacular artworks and designs. However, it is not merely a matter of giving a random equation and waiting for the computer to create an artwork. The equations and patterns are often the basic materials from which I produce my artwork. I pick and choose from among the equations, then from the patterns, subsequently by selecting segments, and by adding my own colors. One can carve out something very artistic from an ordinary image. I can sometimes produce numerous artworks from a single image, called ``polynomiograph." Each of my artwork correspond to a single polynomial equation. Polynomiography is comparable to painting or photography in that the resultant artwork can be diverse and intricate. Polynomiography software is analogous to the camera, easy to shoot an image, but it is the ``polynomiographer" who creates. Beyond 2D artworks there are many other artistic possibilities as Polynomiography can inspire 3D artworks, jewelry designs, stainglass, animation, even back to paintings based on the computer images. The possibilities are mind-bugling and endless (www.polynomiography.com).

KALANTARI Bahman
Mathématicien
Bahman Kalantari est Associate Professor en informatique (computer science) à Rutgers University depuis 1984. Ses travaux scientifiques portent sur l'informatique théorique, la recherche opérationnelle, les mathématiques. Il a développé une méthode de résolution des équations polynomiales selon un processus itératif qui remonte à Newton, ainsi que, associées à cette méthode, des techniques de visualisation des approximations des solutions. Ces techniques sont rassemblées sous le nom de polynomiographie. Les applications sont diverses, tant dans les arts, que dans les sciences et dans l'éducation.



Chinese Acrobats in Paris
I carved this image out from another polynomiograph called ``Acrobats." Though I had created Acrobats long ago, I came to see the possibility of the new image in an instant. But I had to carve it out and carefully recolor many portions. I would also like to see it turned into 3D artwork and perhaps even jewelry design.

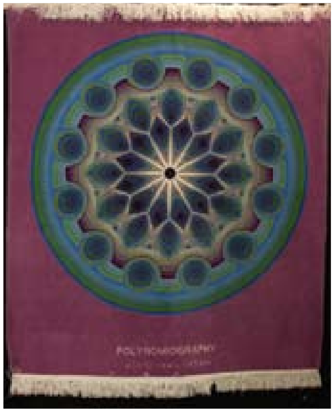
Chinese Acrobats in Paris
J'ai travaillé sur cette image à partir d'un polynomiographe appelé ``Acrobats», créé il y a fort longtemps. J'aimerais bien la voir transformée en une oeuvre d'art tridimensionnelle, ou peut-être servir de modèle pour un bijou.



Cover Design, 2006
This polynomiograph comes from an equation where the location of roots can be seen as the eye-shaped regions. The selection of roots is by design and is only one of the parameters that turn a dry equation into an image I find hypnotic. This and similar type images could be turned into beautiful carpet designs or other art forms such as stainglass.

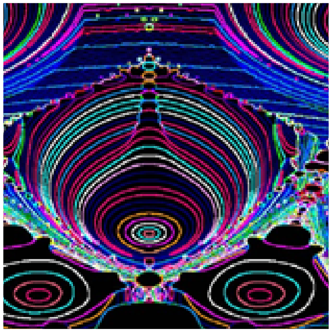
Cover Design, 2006
Ce polynomiographe provient d'une équation dont la localisation des racines apparaît aux extrémités des rayons. Le choix desracines, fait ici a priori, n'est bien sûr qu'un des paramètres qui transforme une équation en une image que je trouve hypnotique. Cette image, comme d'autres de la même veine, peuvent servir de patrons pour la création de tapis ou de vitraux.

KALANTARI



Carpet, version tapisserie 2004
The image "Carpet" was created by design and by selecting an appropriate polynomial equation. The inspiration behind this polynomiograph was an actual Persian carpet. In turn I have had this polynomiograph turned into a high-quality hand-woven Persian carpet consisting of about 1,400,000 knots.

Carpet, version tapisserie 2004
Carpet a été créé à travers la sélection d'une équation polynomiale appropriée. La réalisation d'un tapis persan a été la motivation sous-jacente à la création de ce polynomiographe. Il a par suite servi de modèle pour la fabrication du tapis réel, tissé à la main et contenant environ 1 400 000 noeuds.



Times Square , 2
This image is based on a polynomiograph that has fascinated me for several years. I have returned to it over and over producing many variations.

Times Square , 2
Cette image provient d'un polynomiographe qui m'a fasciné pendant plusieurs années, et dont j'ai créé de nombreuses variations en le retournant dans tous les sens.

Butterfly,2006
Coming from a low-degree polynomial equation, the image reveals a different kind of beauty when viewed through 3D glasses

Butterfly,2006
Provenant d'une équation polynomiale de bas degré, l'image révèle une beauté d'une autre nature lorsqu'on la regarde en trois dimensions à travers des lunettes polarisantes.

KALANTARI

Cathedral, 2006
It is a very rich design with tremendous depth. This is among the images I would ideally like to exhibit as series in different colors.a

Cathedral, 2006
Cette image fait ressortir une étonnante profondeur. Elle fait partie des images que j'aimerais déployer en séries de différentes couleurs.

Hearts, 2006
As all other images it is based on a single polynomiograph. Ideally, I would like to see this printed in huge size covering an entire wall.

Hearts, 2006
Comme toutes les autres images, celle-ci est obtenue à partir d'un seul polynomiographe. Ideally, I would like to see this printed in huge size covering an entire wall.

Valentine, 2006
Beyond the 2D artwork, it inspires jewelery design and huge 3D structure, at least in my imagination.

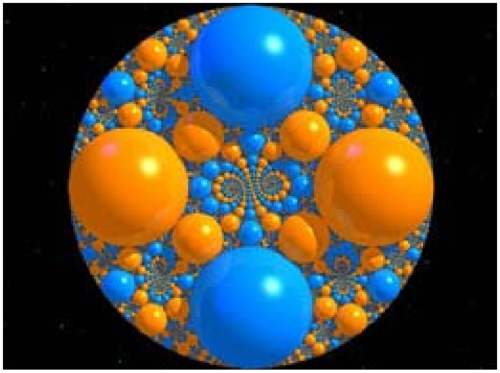
Valentine, 2006
Au-delà de la dimension 2, une telle oeuvre suggère aussi bien la réalisation de bijoux que de grandes structures à trois dimensions, au moins dans mon imagination.

LEYS Jos

Né en 1952 à Niel (Belgique). Ingénieur dans l'industrie chimique occupant d'importants postes de responsabilité, il quitte l'industrie en 2005, et peut alors s'adonner corps et âme à sa passion de l'art mathématique. Povray et Ultrafractal sont ses principaux outils informatiques de création. Artiste recherché par la communauté mathématique internationale, il est notamment renommé pour avoir remarquablement tiré parti de l'ouvrage de David Mumford « Indian Pearls » (Cambridge University Press), et pour avoir visualisé avec art les travaux d'Etienne Ghys, permettant ainsi à celui-ci de compléter son étude.

La série Indra

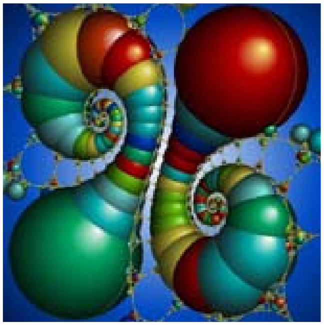
En 2003, j'ai lu le livre «Indra's pearls, the vision of Felix Klein» par David Mumford, Caroline Series and David Wright : s'ouvrait un nouveau monde de structures fractales basées sur des séries de transformations homographiques. J'ai d'abord simplement traduit la méthode décrite dans le livre pour mon logiciel préféré. Puis, avec l'aide de David Wright, j'ai pu étendre cette méthode pour obtenir des images qu'on ne trouve pas dans le livre, par exemple par l'addition d'effets 3D. Les structures fractales qu'on trouve dans ce monde sont d'une très grande élégance, mais aussi d'une très grande complexité. Elles sont néanmoins calculés avec des formules relativement simples. (J.L.)



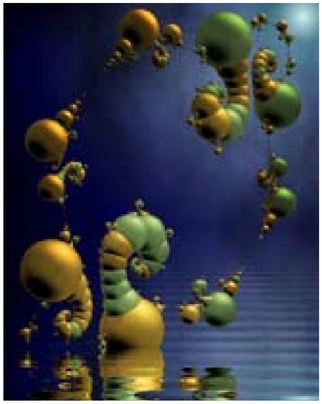
1 on 15 cusp, 100 x 100, 2007

LEYS

Pandora, 50 x 50 2004

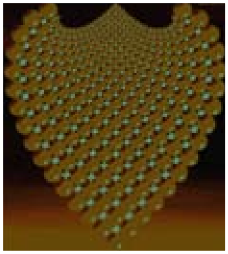


Ballons, 50 x 50 2004

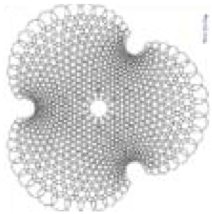


Indra family , 80 x 100, 2004

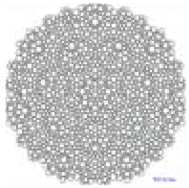
LEYS



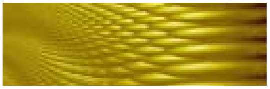
Spearhead, 83 x 75, 2005



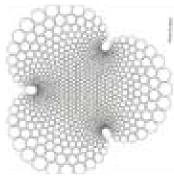
Circle collection 2, 50 x 50, 2005



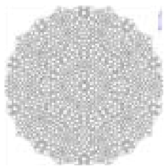
Penrose circles 2, 50 x 50 2005



Ballfield, 35 x 75, 2005



Circle collection 1, 50 x 50, 2005



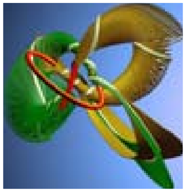
Penrose circles 1, 50 x 50, 2005

Les empilements de cercles

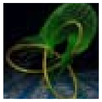
Dans les images précédentes de la série «Indra», on rencontre des familles de cercles ou de sphères qui se touchent et que je trouve fascinantes. J'ai alors cherché
d'autres méthodes pour dessiner de telles familles, et j'ai découvert le travail de Ken Stephenson de l'Université de Tennessee.
Il a décrit un méthode itérative pour ajuster les rayons d'une collection de cercles de sorte qu'il se touchent tous d'une façon imposée (nombre des cercles adjacents à un cercle donné, angles entre les rayons de deux cercles adjacents, etc, …).
Il en résulte des images dont certaines peuvent sans doute être matérialisées par des sculptures, un travail peut-être coûteux. Restons donc avec les images. Il est d 'innombrables manières de combiner des cercles, mais ce qui m'a beaucoup plu, c'est de prendre des pavages de Penrose, et de les remplir avec des cercles. Cela donne des images qui parfois donnent un peu le vertige au
spectateur…

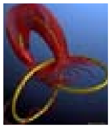
LEYS


Lorenz 50 x 42, 2006


Notices 1, 50 x 502006


Real matrix 1, 50 x 50, 2006


Real matrix 2, 50 x 50, 2006


Real matrix 3, 50 x 50, 2006

L'attracteur de Lorenz

En 1963, le météorologue Lorenz établit un modèle simplifié pour l'étude des phénomènes de convection dans l'atmosphère. Trois équations différentielles définissent la vitesse d'évolution du phénomène dans notre espace usuel. L'état du milieu est représenté par un point situé sur une courbe d'évolution encore appelée trajectoire. Chaque état initial donne lieu à une trajectoire particulière. L'image ci-contre montre un ensemble de trajectoires associées au phénomène (voir également l'image réalisée par Jean-François Colonna). Ces trajectoires tendent à s'approcher d'un domaine appelé un attracteur étrange.

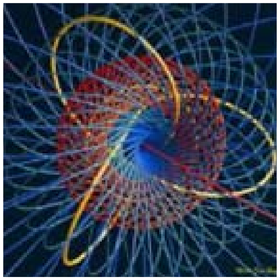
Le phénomène de convection est robuste en ce sens qu'une modification légère et appropriée de l'équation ne modifie par le comportement général des trajectoires.

Les trajectoires fermées du système dynamique de Lorenz, associées à des mouvements périodiques et qui ainsi reviennent sur elles-mêmes, sont appelées des nœuds de Lorenz.

Nœud de trèfle

Une courbe fermée sans point double, comme par exemple une trajectoire associée à un mouvement périodique et qui ainsi revient sur elle-même, est naturellement appelée un nœud. Parmi les plus simples d'entre eux est le nœud de trèfle dont on peut voir deux réalisations matérielles en métal dans la vitrine contenant des œuvres de Philippe Rips (cf les fiches correspondantes). Les images de Jos Leys en donnent ici des visualisations en jaune doré.(cf en annexe le texte intitulé » le nœud de trèfle ») Ces visualisations reposent sur les travaux du mathématicien lyonnais Etienne Ghys.

Seifert fibration, 50 x 50, 2006



Seifert fibration, 50 x 50, 2006
Projection stéréographique partielle de la sphère de dimension 3 feuilletée à la Seifert en nœuds de trèfles et deux cercles (cf en Annexe le texte intitulé « Anatomie de la sphère à trois dimensions »)

PIC Sylvie
Artist
Born in 1957, Sylvie Pic graduated from the school of Fine Arts in Marseilles, where she lives and works. Her work centers on existing space (architecture) symboic representation (geometry, topology) and abstraction. Pic exhbit in France, Canada and the USA

PIC Sylvie
Artiste
Née en 1957, Sylvie Pic est diplômée de l'Ecole des Beaux Arts de Marseille, où elle vit et travaille.
Son travail est centré sur l'espace réel (l'architecture), ou représenté (géométrie, topologie) jusqu'aux confins de l'abstraction. Elle expose en France, aux Etats-Unis, au Canada.

"Three tori"
Serigraph (2 colors), 56 x 76 cm, January200J

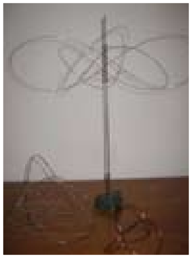
"Trois tores"
Lithographie (2 couleurs), 56 x 76 cm, Janvier 2007

"1, 2, 3, Infinity"
Serigraph, 56 x 76 cm, January 2007

"1, 2, 3, l'infini"
Lithographie, 56 x 76 cm, Janvier20079

RIPS Philippe
Artist
Born in Paris in 1953. His research relates to the car-tightened structures in Snelson like structures for the automobile and furnniture industries
His studies aim at creating kinetic objectst with a time component in geometric and polyhedric substrats.

RIPS Philippe
Artiste plasticien, né à Paris en 1953.
Ses recherches portent sur les structures auto-tendues à la Snelson pour l'auto-construction et la réalisation de mobiliers.
Ses études visent à a création d'objets d'art cinétique en insufflant le facteur temps au sein d'objets géométriques à substrat polyédrique notamment.



Réalisation matérielle de deux nœuds de trèfle
Le nœud de trèfle ou nœud à trois feuilles (en anglais trefoil) est le plus simple des noeuds non triviaux (un nœud trivial est un nœud qu'on peut déformer pour obtenir un cercle plan). Herbert Seifert en 1934 a montré que la sphère dans l'espace à quatre dimensions peut être construite à l'aide d'un assemblage en nombre infini de tels nœuds (cf en annexe le texte sur l'anatomie de la sphère en dimension 3). En tant que trajectoire revenant sur elle-même (trajectoire fermée), Joan Birman et Bob Williams ont découvert sa présence dans le système dynamique de Lorenz qui concerne un aspect de la météorologie.

Variations autour du nœud pentagonal régulier (nœud à cinq feuilles)
trois dispositions des pentagones d'équilibration Ce nœud torique, l'une des généralisations simples du nœud de trèfle, a pour codage (2, 5).

Autour de l'icosaèdre, un nœud régulier à cinq feuilles

Nœud régulier à six feuilles
De dimension 3 feuilletée à la Seifert en nœuds de trèfles et deux cercles (cf en Annexe le texte intitulé « Anatomie de la sphère à trois dimensions »)

Bâti octogonal auto-tendu, entièrement flexible

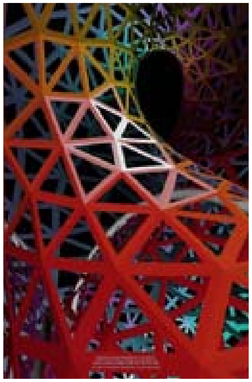
SULLIVAN John
Mathematician
John M. Sullivan was born in 1963 in Princeton, NJ, USA. After earlier degrees from Harvard and Cambridge Universities, he received his Ph.D. in Mathematics from Princeton in 1990. He was then a postdoctoral fellow at the Geometry Center, and taught at the University of Minnesota. In 1997 Sullivan took a new faculty position at the University of Illinois, Urbana. In 2003, he moved to Berlin, where he is Professor of Mathematical Visualization. Sullivan's mathematical art — computer-generated prints and sculptures — has been exhibited in Manhattan, Bologna, Massachusetts, Ohio, and internationally.

" My art is an outgrowth of my work as a mathematician. My research studies curves and surfaces whose shape is determined by optimization principles or minimization of energy. A classical example is a soap bubble which is round because it minimizes its area while enclosing a fixed volume. Like most research mathematicians, I find beauty in the elegant structure of mathematical proofs, and I feel that this elegance is discovered, not invented, by humans. I am fortunate that my own work also leads to visually appealing shapes, which can present a kind of beauty more accessible to the public.

SULLIVAN John
Mathématicien
Né en 1963 à Princeton, NJ, USA. Premiers diplômes aux universités de Harvard et de Cambridge, puis Ph.D. en mathématiques à Princeton en 1990. Postdoctoral fellow et enseignant au Geometry Center de l'University of Minnesota. En 1997, nouveau poste à L'University of Illinois, Urbana. Depuis 2003, il est professeur de Visualisation Mathématique à l'Université Technique de Berlin en Allemagne. Ses oeuvres en art mathématique - images générées par ordinateur, sculptures - ont été exposées en de nombreux endroits comme par exemple à Manhattan ou à Bologne.

Mon art est une excroissance de mon travail de mathématicien. Mes recherches portent sur les courbes et les surfaces dont la forme est déterminée par des principes d'optimisation comme celui de minimiser l'énergie. Un exemple classique est celui de la bulle de savon qui est ronde parce qu'elle minimise son aire à volume donné. Comme la plupart des mathématiciens, je trouve de la beauté dans la structure élégante des preuves mathématiques, et je sens que cette élégance est découverte mais non inventée par les hommes. J'ai la chance que mon travail conduise à des formes attirantes, qui présentent une sorte de beauté plus accessible au public.

Optiverse : Framework Interior
A sphere eversion is a mathematical process of turning a sphere inside-out. The white on the tubing highlight the lineon which the surface turnsinside out.(curve self inersection).



Optiverse : Framework Interior
Montre un morceau de la sphère en retournement dont la triangulation est faite par l'ordinateur.
Le tube blanc indique la ligne le long de laquelle la surface se traverse elle-même (courbe de self-intersection de la surface).

Double Bubble Trouble,
Digital print, 18» x 22», 1999
Double Bubble Trouble shows a double soap bubble in an unstable equililbrium; in the proof that the standard double bubble is in fact best, this case, where one bubble is disconnected, was the most troublesome to rule out.

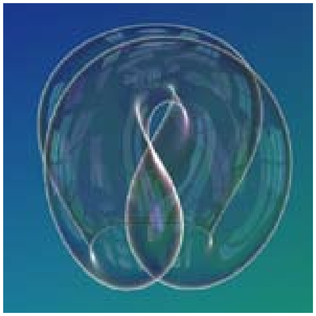
Double Bubble Trouble, Digital print, 18» x 22», 1999
Double Bubble Trouble montre un accolement de bulles de savon dont l'équilibre physique est instable. L'accolement concerne trois bulles : une grosse bulle centrale, une moyenne bulle ceinturant la première, et une toute petite bulle ceinturant la seconde. Toutes les parois des bulles accolées font des angles de 120°. J'ai créé ces images pour illustrer la preuve de la conjecture générale sur les bulles doubles énoncée par Hutchings, Morgan, Ritore et Ross (2000).

SULLIVAN

119 Bubbles
Digital print, 20» x 20», 1990.
119 Bubbles shows the stereographic projection of the 120-cell or dodecaplex, one of the regular 4-polytopes; it has exactly the geometry of a bubble cluster, where one of the 120 cells has become the infinite exterior.

119 Bubbles,
Digital print, 20» x 20», 1990.
119 Bubbles montre la projection stéréographique du polytope régulier dans l'espace à quatre dimensions désigné sous le nom de code 120-cell, également illustré par Patrice Jeener. Il possède la géométrie exacte d'un accolement de bulles, l'une des 120 cellules représentant l'extérieur infini.

Willmore Duel
Digital print, 20" x20", 2004
Willmore Duel shows a Willmore surface, minimizing its elastic bending energy; it is the dual surface to one we used for the minimax sphere eversion in The Optiverse. All three images were rendered with my own custom soap-film shader for Pixar's Renderman software.



Willmore Duel, Digital print, 20" x20", 2004
Willmore Duel montre une surface dite de Wilmore, elle minimise l'énergie élastique de courbure. Elle est la surface duale de l'une de celle qui apparaît dans le film The Optiverse, où elle est utilisée pour réaliser le retournement de la sphère à énergie minimale.
Ces trois images ont été réalisées à partir de mes modifications du logiciel « Pixar's Renderman.

Minimal Flower 3

Minimal Flower 3
La sculpture "Minimal Flower 3" a été mathématiquement conçue en tant que surface minimale (cf la fiche sur les surfaces minimales). Elle représente une bulle de savon s'appuyant un contour métallique dont la forme est un nœud un peu compliqué. La tension superficielle maintient le film de savon rigide afin de minimiser son aire. La forme qui en résulte possède des symétries par rotation d'ordre 2 et 3, elle ne possède pas de symétrie miroir. Elle consiste en un domaine central ayant la forme d'une selle de cheval sur laquelle sont attachés trois rubans torsadées. Il s'agit donc, du point de vue topologique, d'une surface de Dyck trouée non orientable. Cette pièce est une manière d'hommage au sculpteur Brent Collins : son œuvre « Atomic Flower II » m'a incité à essayer de saisir à partir d'une surface minimale la même topologie et les mêmes symétries. La sculpture est fabriquée directement par une imprimante 3D à partir du logiciel de calcul. Au lieu d'épaissir la surface minimale de manière uniforme, on fabrique un objet plus fin près des bords et plus épais en son milieu en doublant le film de savon, et insufflant (virtuellement) de l'air entre les deux films ; les surfaces se faisant face sont par conséquent de courbure moyenne opposée en signe mais d'égale valeur absolue. (J.S.)

ANNEXES

Sur les surfaces minimales de Patrice Jeener et de John Sullivan

Au dix-neuvième siècle, le physicien belge Plateau a vérifié que certaines surfaces formées par les bulles de savon ont la propriété de minimalité au sens des mathématiciens. On entend par là une propriété facile à concevoir : une surface est minimale si, localement, son aire est minimale.

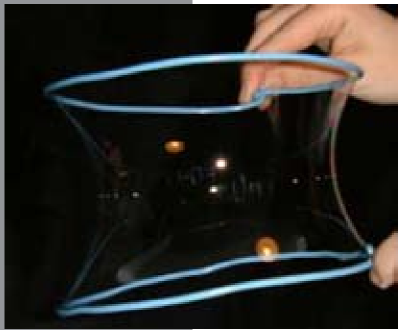
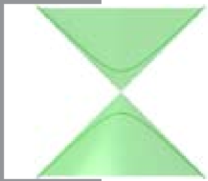


Photo extraite du site de Wikipédia. La surface s'appelle ici le *caténoïde* : c'est, historiquement, le premier exemple de surface minimale qui ait été découvert (Euler, 1744)

Basée sur la notion de courbure, Meusnier en 1776 a donné une condition simple pour qu'une surface soit minimale.
Un fil très fin que l'on fait flotter au vent est une représentation physique d'une courbe au sens mathématique (elle n'a pas d'épaisseur). Les courbes rectilignes sont appelées des droites : il n'y a aucune courbure en chacun de leurs points, cette courbure est nulle. Mais les courbes rectilignes sont plutôt exceptionnelles. Une courbe quelconque a en général une courbure non nulle en la plupart de ses points, la valeur de cette courbure n'ayant aucune raison a priori d'être partout la même.
Une surface mathématique n'a pas davantage d'épaisseur qu'une courbe, et l'on peut dessiner sur cette surface une infinité de courbes. Il se trouve qu'en chaque point de la surface passe au moins un couple remarquable de courbes : il est remarquable parce que les deux courbes qui passent au point donné se coupent à angle droit. Chacune de ces courbes possède une courbure en ce point : leur demi-somme est appelée la *courbure moyenne* de la surface au point considéré.
La surface est dite *minimale* lorsque en chacun de ses points cette courbure moyenne est nulle. C'est évidemment le cas d'un plan ! (CPB)

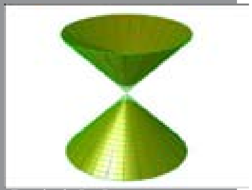
APPENDIX

Sur la série hyperbolique de Jean Constant



Dessin de Jos Leys

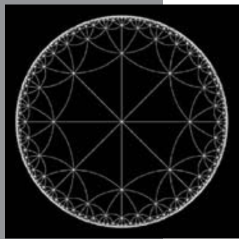
Une demie hyperbole est une sorte de V arrondi en sa base, ou une manière de U dont les branches verticales s'écartent comme des V, et vont à l'infini, se rapprochant de plus en plus en plus de deux droites symétriques l'une de l'autre appelées asymptotes (les bords vert pâle du dessin ci-dessous). L'hyperbole complète (en vert accentué) s'obtient en prenant en compte en plus la symétrique de la demie hyperbole par rapport à un axe horizontal.



Dessin de Jos Leys

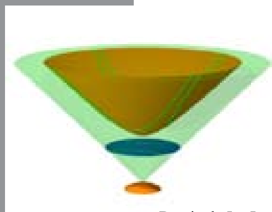
En faisant tourner cette forme, l'hyperbole, autour de son axe vertical, on engendre une surface appelée un *hyperboloïde de révolution à deux nappes*.

Sur cette surface, les géodésiques, les courbes qui minimisent les distances entre deux quelconques de leurs points, sont des hyperboles. Ces hyperboles sont les sections de la surface par des plans passant par le centre de cette surface : c'est le milieu du segment vertical qui joint le point le plus haut de la nappe inférieure (pôle sud) au point le plus bas de la nappe supérieure (pôle nord).



Pavage de Bernie Freidin

Une bonne représentation sur un plan de cet ensemble d'hyperboles définit une géométrie plane qualifiée d'hyperbolique.
Plaçons par exemple au pôle sud une source lumineuse. Dessinons, sur un plan horizontal passant par le centre de la surface, le point d'intersection, avec ce plan, d'un rayon dont l'autre extrémité parcourt la nappe supérieure de l'hyperboloïde.



Dessin de Jos Leys

Ce point d'intersection parcourt un disque plan (en bleu dans le dessin réalisé par Jos Leys), formé de l'ensemble des points situé à l'intérieur d'un cercle (en blanc dans l'image faite par Bernie Freidin). Lorsque l'extrémité du rayon parcourt une des hyperboles précédentes, il se trouve que le point d'intersection de ce rayon avec le plan horizontal décrit une droite (image de l'hyperbole située dans un plan vertical contenant l'axe de l'hyperboloïde) ou un arc de cercle (image de l'hyperbole située dans un plan quelconque passant par le centre de la figure).

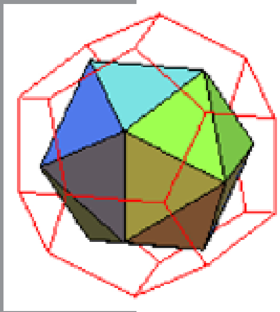
On fabrique, pour les points intérieurs au disque, une expression analytique de la distance entre deux points, de sorte que la distance ordinaire entre deux points situés sur l'hyperboloïde évaluée selon une géodésique qui les joint, est la même que celle que l'on mesure entre leurs images dans le plan par l'intermédiaire de cette expression particulière, appelée en l'occurrence « métrique de Poincaré »

Ce disque muni de cette métrique est appelé un *plan hyperbolique*.

On peut couvrir entièrement un sol plan avec un carrelage, les carreaux ayant tous même forme et mêmes dimensions : on dit qu'on a fait un *pavage* du plan. De la même façon, on peut réaliser des pavages du plan hyperbolique. L'image qui précède nous montre un tel pavage par des « carreaux » hyperboliques, ici des triangles. Dans les années 80, un mathématicien parisien, Christian Léger, a présenté un coloriage de ce même pavage plus complet avec trois couleurs.

C.P.B.

A propos de la série des icosaèdres géodésiques de Jean Constant

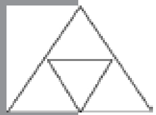


L'icosaèdre est le cinquième des polytopes réguliers mentionnées par Platon. Il possède 12 sommets, qui, sur une sphère, découpent 20 triangles sphériques équilatéraux.

L'icosaèdre est le polytope régulier associé aux solutions des équations polynomiales du cinquième degré : elles définissent les courbes algébriques appelées des *quintiques*. Le groupe de ses isométries a été pour la première fois décrit par Félix Klein en 1884.

Il se trouve que l'on peut tracer les sommets sur des grands cercles de la sphère de sorte que les triangles soient *géodésiques* : on entend par là que le chemin de longueur minimale qui joint deux sommets est une portion d'un tel grand cercle.

APPENDIX



On peut augmenter de façon harmonieuse le nombre de grands cercles en subdivisant chaque triangle équilatéral en quatre triangles de ce type plus petits : Les tableaux de Jean Constant représentent une série de vues d'artiste et du dessus de cet icosaèdre sphérique, plus ou moins subdivisé.

Si, en dessinant d'abord autour de chaque sommet un pentagone régulier, on tronque de manière régulière l'icosaèdre en enlevant le chapeau formé par la petite pyramide qui s'appuie sur ce pentagone, on obtient l'*icosaèdre tronqué* ayant 5 x 12 = 60 sommets : il est le squelette des ballons de football, ainsi que de la molécule de carbone C_{60} comprenant 60 atomes de carbones et appelée fullerène ou quelquefois footballène.

A propos de la série **Indra de Jos Leys**

L'exposition précédente « Mathématiques et Art » a présenté l'image réalisée par David Wright et qui a servi de couverture au numéro de Décembre 2004 des *Notices de l'American Mathematical Society.* L'auteur décrit dans ce numéro le principe de sa procédure.

Dans cette famille de travaux, on fait appel à une transformation qui conserve les angles et qui, dans le plan, transforme un cercle en un autre cercle : découverte par Euler, elle est appelée en France la transformation *homographique*, *de Möbius* ou *linéaire fractionnaire* chez les anglo-saxons. Son expression est fort simple :

$$z' = h(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Tous les symboles, z', z, a, b, c, d représentent des nombres qui appartiennent à un ensemble structuré en corps. Lorsque ce corps est celui des nombres de Chuquet-Cardan (dits complexes), cette expression décrit toutes les transformations fondamentales de la géométrie du plan. (C.P.B.)

A propos des empilements de cercles de Jos Leys

On consultera avec intérêt le site de Ken Stephensonhttp://www.math.utk.edu/~kens La manière dont la nature remplit l'espace est une des questions parmi les plus importantes. Sans toutefois s'interroger sur la portée physique de ce problème, les mathématiciens l'ont abordé depuis Képler. On peut essayer de remplir un espace avec des briques polyédriques toutes sorties du même moule, c'est le problème du pavage des espaces. Penrose a abordé ce problème lorsque se présentent des anomalies. On peut vouloir aussi remplir un espace avec des sphères (un cercle est la réalisation d'une sphère à une dimension). C'est ce type de problème que Klein a abordé lorsque l'espace donné est un disque plan, un domaine limité par un cercle, et qui est développé dans la série Indra. (C.P.B.)

A propos du système dynamique de Lorenz et de son contenu géométrique

1) Le nœud de trèfle
Une courbe fermée sans point double, comme par exemple une trajectoire associée à un mouvement périodique et qui ainsi revient sur elle-même, est naturellement appelée un nœud. Parmi les plus simples d'entre eux est le nœud de trèfle dont on peut voir deux réalisations matérielles en métal dans la vitrine contenant des œuvres de Philippe Rips (cf les fiches correspondantes). Les images de Jos Leys en donnent ici des visualisations en jaune doré.

On peut coder un nœud en plaçant sur celui-ci un nombre fini de points par exemple régulièrement espacés et désignés par des symboles ad hoc.

Le topologue, qui ne s'intéresse qu'à l'espace sous-jacent aux objets mais non à leurs caractéristiques métriques, ne fait pas de distinction entre un nœud et un cercle topologique : ce sont courbes fermées de dimension 1.
Joan Birman et Bob Williams ont prouvé que les trajectoires en forme de nœud de trèfle figuraient dans le système dynamique de Lorenz. Etienne Ghys de Lyon a établi qu'on les rencontrait en d'autres circonstances : appelons modulaire l'espace constitué par tous les réseaux que l'on peut concevoir de points régulièrement espacés dans le plan, et système dynamique modulaire un système dynamique sur cet espace qui conserve les aires des domaines de chaque réseau. Alors à toute trajectoire fermée présente dans ces systèmes dynamiques modulaires, on peut faire correspondre une trajectoire analogue dans le système dynamique de Lorenz, la réciproque étant vraie. On rencontre donc dans les deux cas les nœuds de trèfle en particulier.

Il est par ailleurs remarquable qu'on peut représenter par la sphère S3, à laquelle on enlève simplement un nœud de trèfle, l'espace des réseaux réguliers dont l'aire du motif fondamental est l'unité. Les points successifs d'une trajectoire dans un réseau peuvent s'interpréter comme des transformations successives de ce réseau et donc comme une trajectoire dans la sphère S3. Par un choix judicieux des systèmes dynamiques modulaires caractérisés par des trajectoires fermées en forme de nœud de trèfle, on parvient alors à feuilleter cette sphère par des nœuds de trèfle (cf le texte sur la fibration de Seifert).
Les courbes qui, sur les images, s'enroulent autour des nœuds de trèfle sont des représentations des trajectoires de ces systèmes dynamiques modulaires : ces systèmes sont dits hyperboliques, ils possèdent des trajectoires qui s'éloignent de plus en plus du nœud, et d'autres au contraire qui s'en rapprochent sans fin. (C.P.B.)

APPENDIX

2)Anatomie de la sphère à trois dimensions

L'image montre, projetés dans l'espace usuel, quelques éléments locaux d'une fibration de Seifert de la sphère topologique à trois dimensions. Un objet est dit *topologique* quand on le considère seulement sous l'angle de sa forme et de la manière dont s'organise les voisinages de chacun de ses points, les considérations métriques ne jouent aucun rôle : pour le topologue, le cercle, l'ellipse et le rectangle représentent le même objet.

Lorsqu'on sectionne un arbre par un plan horizontal, on obtient une base de l'arbre : au dessus de chaque point de la base s'élevait une fibre. Un espace fibré mathématique consiste, entre autres, en la donnée d'une base et d'une fibre type. La base est bien sûr un espace mathématique, au-dessus de chacun de ses points on trouve un autre espace mathématique, la fibre ; la nature de la fibre ne varie pas quand on change de point de base, et les passages d'un fibre à sa suivante s'accomplissent toutes de la même façon.

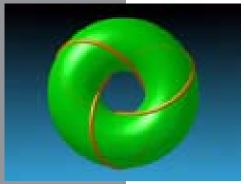
Lorsque la fibre est une sphère topologique, on dira être en présence d'une *fibration à la manière de Seifert.* Prenons par exemple un pneu plein appelé encore un tore plein ; le grand cercle central est l'âme du tore ; si on sectionne le tore perpendiculairement à l'âme en un de ses points P, on obtient un disque constitué d'une famille infinie de cercles tous centrés en P. Le fil de cuivre formant un nœud est une bonne représentation matérielle d'un tel tore topologique. Il peut avoir en particulier la forme globale d'un nœud de trèfle.

On connaît bien la sphère creuse $\mathbf{S}^2$ dans notre espace habituel. Il y a bien des façons de la construire à partir de cercles : par exemple toutes les intersections de cette sphère par la famille infinie de plans passant par un point donné P de la sphère sont des cercles qui passent par ce point. On peut alors prendre un grand cercle passant par ce point, puis tous les cercles passant également par ce point, situés à l'intersection de la sphère avec tous les plans perpendiculaires au grand cercle et passant par P : la sphère peut être vue comme un fibré à la manière de Seifert, il a pour base le grand cercle, pour fibres tous les autres cercles que l'on vient de définir, avec de plus, en P, une *fibre singulière*, le cercle de rayon nul.

Il se trouve que la sphère de dimension 3, $\mathbf{S}^3$, qui n'est pleinement « visible » que dans l'espace à 4 dimensions, peut également être ainsi feuilletée en cercles topologiques, qui sont tous, par exemple, des nœuds de trèfle, à l'exception de deux d'entre eux, singuliers, qui sont de vrais cercles. On peut en effet feuilleter la sphère en surfaces dites de Seifert, elles-mêmes feuilletées en nœuds de trèfle, et dont le bord, commun à toutes ces surfaces, est lui-même un nœud de trèfle.

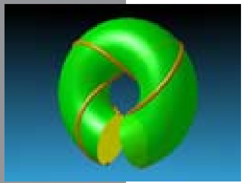
Les images qui suivent ne donnent que le début de la construction.
Elles montrent d'abord l'enroulement d'un, puis de deux, puis d'une infinité de nœuds de trèfle (nœud à trois feuilles) autour d'un tore creux : cette surface est feuilletée par ces nœuds. A vrai dire le nombre de feuilles des nœuds ne joue aucun rôle pourvu que les nœuds aient tous le même nombre de feuilles. En sectionnant le tore et en l'étirant, on obtient un cylindre. A partir du cylindre, on reconstruit le tore par la procédure de pliage et de soudure suivant une démarche inverse à la précédente.

APPENDIX



Enroulé autour du tore, un nœud de trèfle

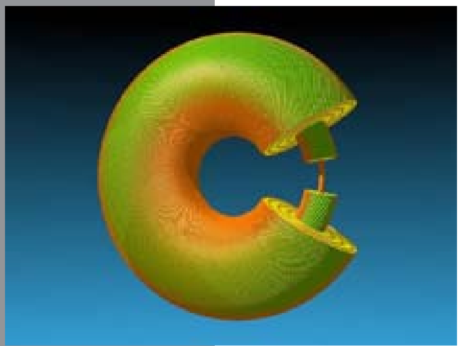
On s'apprête à sectionner le tore



Le tore est sectionné, on l'étire

Jusqu'à obtenir un cylindre

On peut enrouler côte à côte sur le cylindre, deux, une infinité de fils, de nœuds coupés qui vont tapisser, on dit feuilleter le cylindre les nœuds correspondants feuillètent le tore



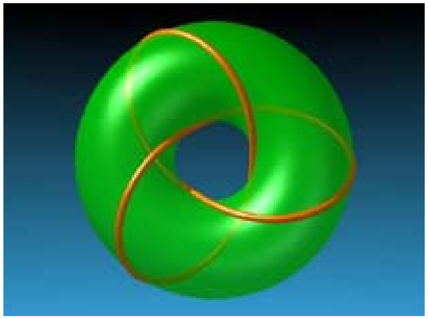
Dans l'image ci-contre, on voit le tore plein feuilleté par des tores creux, et le tore exceptionnel, l'âme du tore plein, un cercle, une des deux fibres singulières dans la construction de $\mathbf{S}^3$. Chaque tore creux est lui-même feuilleté en nœuds, ici de trèfles. (C.P.B.)

Remerciements à Jos Leys
pour avoir construit toutes ces images

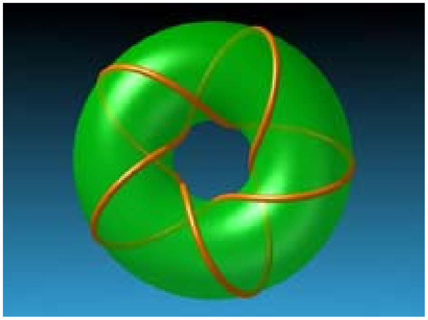
APPENDIX

Les nœuds réguliers

Le nœud de trèfle ou nœud à trois feuilles (en anglais trefoil) est le plus simple des noeuds non triviaux réguliers (un nœud trivial est un nœud qu'on peut déformer pour obtenir un cercle plan).
Herbert Seifert en 1934 a montré que la sphère dans l'espace à quatre dimensions peut être construite à l'aide d'un assemblage en nombre infini de tels nœuds (cf la note sur la fibration de Seifert). En tant que trajectoire revenant sur elle-même (trajectoire fermée), Joan Birman et Bob Williams ont découvert sa présence dans le système dynamique de Lorenz qui concerne un aspect de la météorologie



Le nœud de trèfle que l'on voit s'enroule agréablement autour d'un tore (la chambre à air d'un vélo) : il est appelé un nœud torique, noté (3, 2) car obtenu en parcourant deux fois le tore, et en effectuant trois enroulements sur ces deux tours.



Ce nœud torique, l'une des généralisations simples du nœud de trèfle, a pour codage (2, 5).

Par l'intermédiaire de leur projection sur un plan, on associe différents groupes aux divers nœuds. Par exemple au nœud présent N, lui est associé un groupe G(N) engendré par deux éléments a et b qui satisfont la relation $a^5 = b^2$: on note cette présentation du groupe G(N) = (a,b ; $a^5 = b^2$).

Construit autour de l'icosaèdre (voir la série correspondante des œuvres de Jean Constant), il en possède aussi le groupe de symétries que Félix Klein a étudié le premier en 1884.