TROIS CONTES

Les joyeuses Aventures du Kangourou merveilleux

Claude-Paul BRUTER

dessins et illustrations

Anatoly FOMENKO

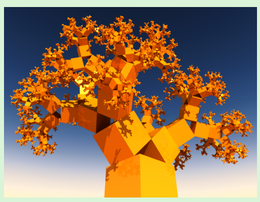
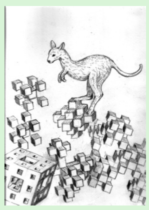
Patrice JEENER

Dmitri KOZLOV

Jos LEYS

European Society for Mathematics and Art
ESMA

Chez d'autres éditeurs (de langue française) :

Sur la Nature des Mathématiques Gauthier-Villars, Paris, 1973

Topologie et Perception T.1 bases philosophiques et mathématiques 2ème édition 1985
T.2 aspects neurophysiologiques 1976
T.3 considérations socio-psychologiques et linguistiques 1986
Maloine-Doin, Paris

Les Architectures du Feu Flammarion, Paris, 1982

De l'Intuition à la Controverse Blanchard, Paris, 1987

Comprendre les Mathématiques Odile Jacob, Parsis, 1996

La Construction des Nombres Ellipses, Paris 2000

Mathematics and Art III Cassini, Paris, 2015

Mathematics and Art IV Cassini, Paris, 2018

AVANT-PROPOS

L'ouvrage s'adresse à tous les enfants de 7 à 107 ans. Les premiers demanderont que l'on commente les images, les derniers méditeront sur les notes historiques accompagnant chacun des contes.

Cher lecteur, les héros de ces trois contes sont au nombre également de trois. Ils se nomment Céphaline, Kangourou, et Sphalos. Céphaline est la grande amie de nos deux merveilleux amis. Ils sont merveilleux parce qu'ils sont capables d'accomplir des mouvements extraordinaires. Sphalos comme Kangourou peuvent d'une seule glissade comme Sphalos, d'un seul bond comme Kangourou, atteindre l'infini, les étoiles les plus éloignées auxquelles on peut penser. Kangourou peut aussi pivoter sur lui-même à toute vitesse comme la plus fascinante des danseuses, et tous deux, Sphalos et Kangourou peuvent aussi bien aller vers l'avant que vers l'arrière. Et sans doute comme toi, ils sont gourmands et grisés par le sport qu'ils pratiquent.

Ces trois personnages attachants vont te faire découvrir un peu de notre univers, et d'une façon peu ordinaire. Ils vont, sans que tu n'y prennes garde, t'habituer petit à petit à regarder les objets de ce monde, les aventures qui leur arrivent, avec le regard attentif de ces personnages un peu fabuleux qu'on appelait dans les anciens temps des astrologues, parce qu'ils regardaient beaucoup le ciel, essayant de comprendre les mouvements de ces chose étranges qu'ils observaient la nuit, sous notre belle voûte étoilée.

Ces contes, on te les lira peut-être, ou bien tu partageras leur découverte avec d'autres personnes, ou bien même tu prendras quelque plaisir à les relire seul, demain, ou bien plus tard, alors que tu auras appris beaucoup de choses parfois savantes.

Dans le premier conte, les évènements adviennent dans les montagnes, l'hiver, nos héros pratiquent le ski. Tu découvriras les étranges personnages qu'ils rencontrent, la fameuse pâtisserie qui les attire, où ils se régalent, tu t'interrogeras comme eux sur leurs découvertes, les jolies formes qu'ils nous font voir.

Dans le second conte, seuls Kangourou et Sphalos sont présents. Liant le nombre au déplacement, Kangourou et Sphalos, ces as du mouvement, capables de construire des échelles les conduisant jusqu'aux étoiles, te feront entrevoir l'infinité du monde par l'infinité des nombres. Tu découvriras leur brillant ami Soleil, il les éclaire et les guide dans la construction de ces escaliers tournants sans fin jusqu'aux confins de l'univers, il leur en fait découvrir l'architecture cachée.

Dans le dernier conte, nos trois héros rencontrent le cousin du Père Noël, oui, je dis bien le cousin du Père Noël. Il te dira ses secrets. Il te faudra, comme lui, être patient, courageux, tenace, pour le suivre dans ses démarches de pensée par lesquelles il a fait ses découvertes. Mais quelle fierté, quel plaisir ensuite ressentiras-tu d'avoir compris la signification de ses dires, d'être à ton tour capable de transmettre ces secrets, et d'en révéler les sources.

Un conte transmet un savoir, une manière de comprendre le monde, d'exercer une activité. Il a toujours une visée pédagogique. Elle ne saurait être exhaustive, ni parfaite. Un conte est simplement l'expression d'une intention bien commune : essayer d'apporter ce qui nous semble un peu de bien autour de nous.

Claude Paul Bruter

www.math-art.eu

Le kangourou merveilleux

Claude-Paul BRUTER

Dessin et illustrations

Patrice JEENER
Jos LEYS

Kangourou joue avec l'infini

Gravure de Patrice Jeener

Chapitre 1

Bonjour Monsieur le Prince

Il y avait une fois, dans le lointain pays ensoleillé, au-delà des mers bleutées et des océans apaisés, un jeune kangourou tout souriant dont le nœud papillon rouge se détachait sur l'habit jaune qu'il portait. Il était prince des kangourous et aimait voyager.

A l'aurore il se levait, faisait ses ablutions et partait. Il aimait suivre les trajets que son ami le soleil éclairait. Sa route était celle des rayons lumineux qui le rendaient si joyeux. Il allait droit avec eux, tout en sautant, parfaitement heureux.

Tout en sautant, il comptait et riait. Il s'amusait. «Regarde, Soleil, disait-il : je fais deux petits sauts, tu vois, l'un après l'autre. Eh bien regarde encore, je sais faire un plus grand saut en arrière qui me ramène à mon point de départ !»

Les kangourous ses sujets, qui sur son passage l'observaient, n'en croyaient pas leurs yeux. N'était-il pas le seul, l'unique, capable de sauter en avant puis de sauter en arrière, il était merveilleux ! Et un original : dormant la nuit alors que parents et autres kangourous dormaient le jour !

Le Soleil, son ami, sur son ordinateur tout neuf, relatait ces hauts faits. Pour être bref, n'était-il pas très occupé, et comme il ne savait pas très bien dessiner, représentait son kangourou en train de faire un petit saut par un dessin très particulier. Ce dessin, le voici : 1. Soleil disait qu'il s'agissait là d'un chiffre, ou encore d'un symbole, et l'appelait tout simplement «un».

De nos jours, tous les petits enfants savent que le dessin 1 est une représentation de quelque chose, en particulier du prince des kangourous en train de faire un petit saut.

Notre kangourou faisait donc un petit saut 1 suivi d'un autre petit saut 1, puis un grand saut en arrière qui le ramenait à son point de départ. Ce grand saut, le Soleil le représenta par un autre dessin, le chiffre 2. En même temps qu'il faisait le dessin de ce chiffre, Soleil prononça «deux». Deux désigne ce dessin, ce chiffre 2.

Comme ce grand saut se faisait merveilleusement en arrière, pour le distinguer des petits sauts précédents qui se faisaient vers l'avant, Soleil fit précéder le chiffre 2 d'un autre petit dessin signifiant en arrière, que voici : -. Il appela ce nouveau symbole «moins». Voilà : - 2 représente un grand saut vers l'arrière.

Après être revenu à son point de départ, notre jeune kangourou, en grande forme, fit à nouveau un grand saut, un peu comme celui de tout à l'heure, mais cette fois-ci vers l'avant. Soleil le nota tout simplement 2.

Nous devons ici arrêter un moment notre histoire, car le téléphone sonnant, Soleil dut quitter son ordinateur.

Chapitre 2

Les dessins du Soleil

Lorsqu'il revint devant son ordinateur, Soleil vit le prince des kangourous en train de faire des sauts sur place. Il n'avançait pas, il ne reculait pas. Il riait.

Soleil nota par le dessin-chiffre 0 le saut sur place, ou encore l'absence d'avancée ou de recul accompagnant le saut sur place. Il appela ce chiffre «zéro».

Puis Kangourou fit encore un petit saut suivi encore d'un autre petit saut.

Pour représenter la succession des deux petits sauts, Soleil chauffa davantage et dessina encore un autre symbole, une petite croix, $+$, qu'il dénomma «plus». De sorte qu'il représenta :

- un saut sur place suivi par un saut sur place par le dessin :

$$0 + 0$$

- un petit saut suivi d'un petit saut par le dessin :

$$1 + 1$$

- un petit saut suivi d'un petit saut, suivi d'un grand saut en arrière par le dessin :

$$1 + 1 + (- 2)$$

Ce qui fait aussi que notre petit kangourou est merveilleux, c'est qu'il est infatigable, mais vraiment infatigable. Il est capable de faire des sauts, sur place ou non, sans s'arrêter.

Il peut sauter comme :

$$0 + 0 + 0 + 0 + ..+ 1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 1 + ... + 2 + 2 + 0 + 1 + (-2) + (-2) + 1 + ... +$$

et cela sans fin. Même Soleil est ébloui !

Quand on dit plus, on fait une addition. Quand on dit moins, on fait une soustraction. On peut faire des additions et des soustractions sans fin.

Que tout ceci est fatigant ! Arrêtons-nous un peu avec notre ami le kangourou. Il y a justement sur notre route une marchande de glaces : allons nous rafraîchir ! Que préférez-vous : blanc, rose, vanille, chocolat ?

Chapitre 3

Le soleil se repose

Retournons-vite voir Kangourou. Tiens, il saute sur place, 0, et donc n'avance pas.

Cela donne idée : pourquoi ne pourrrait-on pas dire que le dessin-chiffre 0 représente aussi la longueur du chemin parcouru par le kangourou quand il saute sur place ? Puisque, quand il saute deux fois à la suite sur place (0 + 0), il reste sur place, 0, on peut dire que (0 + 0) est comme 0.

De la même façon : quand il fait un petit saut, 1, il franchit un chemin d'une longueur déterminée. Ne pourrait-on pas dire que 1 représente la longueur du chemin attaché à ce saut ? Plus généralement ne pourrait-on pas dire que 2 représente aussi la longueur du chemin attaché à un grand saut ?

Et comme après avoir fait deux petits sauts consécutifs (1 + 1), Kangourou revient à son point de départ par un grand saut en arrière, ne peut-on pas dire que 1 + 1 - 2 est comme 0, et puisque 1 + 1 est comme 2, que 2 - 2 est comme 0 ?

Soleil ne dit pas comme, il dit «égal». Egal c'est vraiment comme, c'est tout à fait comme. Et pour représenter «égal», il a fabriqué le symbole =.

Ainsi, dans son langage sur l'ordinateur, Soleil écrit, pour représenter à la fois les sauts et les déplacements de son ami Kangourou :

$$0 + 0 = 0,\ 1 + 1 = 2,\ 1 + 1 - 2 = 0,\ 2 - 2 = 0$$

Mais voilà que le téléphone sonne à nouveau ! Le soleil nous quitte, le ciel devient plus gris. Va-t-il pleuvoir, va-t-il faire nuit ?

Chut, avant de nous reposer, réfléchissons un peu.

Au fond, qu'a fait le soleil jusqu'à présent ? Envoyer de beaux rayons, et faire, comme tous les objets de la nature, des représentations de ce qui l'intéresse.

Qu'est-ce qu'une représentation : un dessin, une sculpture, un tableau, une image comme celle qui se crée en nous quand on regarde une poupée, une voiture, le chat. La représentation n'est pas en général identique à l'objet observé : le dessin 1 n'est pas le petit saut du kangourou ; ce que nous voyons de la voiture, cette image mentale qui en est la représentation, ne nous montre qu'une faible partie de l'objet et de ses propriétés.

Où Kangourou irait-il, comment se nourrirait-il s'il était totalement aveugle, s'il ne pouvait voir où se trouve sa nourriture, si donc ne s'était pas créée dans sa tête une représentation de son environnement grâce à laquelle il pourra maintenir sa stabilité dans l'espace, et à travers le temps ?

Il est temps d'aller dormir, et de faire, comme le prince des kangourous, de beaux rêves où l'on voit dans un ciel tout jaune, voler dans tous les sens, un étrange papillon rouge !

Chapitre 4

Madame Proxima avait téléphoné

Coucou, Soleil !

C'est sa voisine immédiate qui lui avait téléphoné. Soleil a des voisins et des voisines ? Mais oui, la plus proche s'appelle Madame Proxima Centaure. Quand vous entendez centaure, vous pouvez croire que Madame Proxima, c'est son prénom, est une personne affreuse parce qu'elle a cent torts, ou au contraire que c'est une personne idéale car elle est sans défaut, sans tort. Mais ce n'est pas ça du tout. Certains prétendent qu'elle s'appelle Centaure parce que son père ou son mari, on ne sait pas trop, avait la force d'un taureau et l'intelligence des hommes, tout comme ces animaux fabuleux dont les Grecs anciens nous ont laissés des sculptures. D'autres enfin écrivent Centores pour son nom de famille. Allez savoir ! Les recherches sont en cours pour trouver l'exacte vérité...

Madame Proxima s'inquiétait de la santé de Monsieur Soleil. Il avait chaud et, surtout le soir, l'on voyait sur son visage tout rond devenu rubicond, des éruptions. Il n'y avait en fait aucune inquiétude à avoir pour l'instant. Les éruptions, ça lui arrive de temps en temps, il est coutumier du fait, elles font partie de sa constitution «physiologique». Madame Proxima le savait bien, mais elle avait trouvé là un beau prétexte pour téléphoner à son voisin Soleil.

Après les politesses d'usage portant notamment et bien sûr sur sa santé, Madame Proxima lui posa la question :

«Alors, puisque tout va bien, que faites-vous en ce moment ?

- Comme vous me l'avez aimablement dit, je renais chaque jour, je suis comme les hommes de la Renaissance, qui, il y a cinq cent ans, pensaient que l'œil émettait des rayons leur permettant de voir. J'observe en ce moment mon ami le jeune prince des kangourous. Il se déplace le long de l'un de mes rayons rectilignes, qu'entre nous nous appelons une droite. Il va d'un point à un autre, toujours joyeux, parfois en avant, parfois en arrière, on le voit rire, il fait en somme ces déplacements, qu'entre nous, nous appelons des translations.

- Ces déplacements, ces translations, les fait-il rapidement, ou préfère-t-il se prélasser et courir aussi vite que la tortue ?

- Aujourd'hui, ma chère Proxima, je ne m'en préoccupe pas. J'ai une toute autre idée en tête : raconter à tous les petits amis de notre kangourou merveilleux des histoires étonnantes sur, ce qu'entre nous, nous appelons les nombres.

- Oh, que vous avez raison, et que j'aimerais bien, moi aussi, entendre ces histoires en compagnie de tous ces petits amis. Mais voyez-vous j'habite quand même un peu loin de vous !

- Ne vous inquiétez pas Proxima. Aujourd'hui avec Internet, nous pouvons faire bien des choses. Bon, je vais d'abord leur dire ce que sont ces choses, qu'entre nous, nous appelons les nombres. A bientôt Proxima, et portez-vous bien !»

Chapitre 5

Les glissades de Sphalos

Soleil reposa le téléphone. Il s'étira, tendant en l'air bras et jambes, fit mine de bâiller, émit un grognement, puis d'un coup relâcha tous ses muscles, les bras et les jambes tombèrent, il était détendu.

Il marmonna, presque en rêvant :
- Oui les nombres sont des êtres imaginaires, que l'on ne voit pas, qu'on ne peut pas toucher, qu'on dit abstraits, mais que l'on connaît par leurs représentations.

On les connaît, on les connaît, c'est vite dit. On connaît beaucoup de choses sur eux, mais pas tout. Peut-être m'aiderez-vous à connaître ce qu'on ne connaît pas encore ! ? Vous le voulez, oui ? Bravo ! Mais d'abord, que savons-nous sur eux ?

Les amis de kangourou se regardèrent, l'œil presque fixe, le regard presque étonné, le sourcil en accent circonflexe ! Qu'est-ce qu'un nombre, voilà bien une question difficile !

Soleil sourit. Il pensait que les hommes, souvent par manque de vocabulaire, ou d'imagination, ou par quelque forme de lassitude, appelaient parfois n'importe quoi avec n'importe quoi. Il savait aussi que les êtres abstraits, ne sont pas si abstraits que ça, ils peuvent être un peu comme les êtres vivants, évoluer, changer, se modifier.

Soleil se décida enfin à parler :
- Un nombre représente une transformation, le mouvement qui l'accompagne, et un nombre est lui-même représenté par des chiffres.

Les amis du kangourou se regardèrent à nouveau. Ils avaient l'impression qu'en une phrase, Soleil avait dit beaucoup de choses, un peu trop pour la première fois. Ils éprouvaient le besoin d'explications complémentaires, d'exemples qui leur seraient accessibles, qui les convaincraient du bien-fondé du propos entendu.

Le regard rayonnant et perçant, mais aussi caressant du Soleil, se posa sur les visages attentifs, Soleil voyait leur attente.

- Faites d'abord venir, leur dit-il, Sphalos, votre champion, le roi des patineurs, et demandez-lui de glisser sur le rayon, sur la droite lumineuse, en compagnie de votre prince. Il partira au moment même où votre prince quittera le sol, et arrivera au même instant au point où le prince touchera le sol.

La glisse de Sphalos de A vers B s'appelle une translation. Elle est comme un saut du prince, qui va également de A en B. Ce mot, comme, est important. Il dit ici qu'à tout mouvement de Kangourou, correspond un mouvement de Sphalos. Il dit aussi qu'à tout mouvement de Sphalos correspond un mouvement de Kangourou. Les mouvements ne sont pas les mêmes, mais ils conduisent à des résultats identiques en matière de position initiale et finale - les savants disent que, de ce point de vue, il y a bijection entre ces deux ensembles de mouvements. On peut donc les représenter de la même façon, par des chiffres !

Êtes-vous d'accord, mes amis ?

Chapitre 6

Un merveilleux canard

Sphalos et Kangourou étaient très copains. On les aurait même crus jumeaux car ils portaient les mêmes couleurs, jaune pour Kangourou, et jaune pour Sphalos le canard, car je ne vous l'avais pas dit, Sphalos est bien un canard ! Les deux compères faisaient tout pareillement : quand l'un sautait, l'autre glissait. Quand l'un glissait, l'autre sautait.

Et puis également, ils étaient aussi merveilleux, l'un que l'autre.
- Quand l'un sautait sur place, l'autre ne glissait pas (0) : une translation nulle disaient-ils !
- L'un comme l'autre pouvaient ne pas s'arrêter, de sauter ou de glisser.
- Ils pouvaient, l'un comme l'autre, faire un mouvement vers l'avant, puis accomplir le mouvement symétrique, celui vers l'arrière, qui les ramenait à leur point de départ.

Et ce n'est pas tout, comme vous l'allez voir :
Sphalos était capable de faire d'immenses glissades, Kangourou de faire d'immenses sauts, l'un comme l'autre encore plus immenses qu'immenses, des glissades et des sauts dont vous n'avez pas idée. On les disait infinis, ce que Soleil représentait par ce dessin, par ce symbole : ∞, appelé donc le symbole de l'infini.

Ainsi, Sphalos et Kangourou étaient deux personnages fabuleux qui se ressemblaient beaucoup, et pourtant ils n'étaient pas jumeaux, puisque l'un était canard et l'autre Kangourou ! Mais à l'évidence, ils partageaient de lointains ancêtres !

Mais alors, comment faisait donc Soleil pour représenter par des chiffres cette immensité de sauts et de glissades, de translations différentes ?

Soleil ne gardait pas ses secrets, comme le faisaient il y a bien bien longtemps, bien avant le Président de la République, Louis XIV et Jules César, les prêtres et savants égyptiens qui construisirent les grandes pyramides ! Bien sûr, il lui fallut de nombreuses années, des années et des années avant qu'il ne parvint à fabriquer le système facile de représentation que tous les hommes d'aujourd'hui emploient.

Le voici :
Kangourou et Sphalos savent accomplir n'importe quelle translation, que ce soit par des sauts ou des glissades.

Soleil note alors le saut représenté par :

$1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1$ par le dessin-chiffre 3 (trois)
$1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 3 = 3 + 1$ par le dessin-chiffre 4 (quatre)
$1 + 4 = 4 + 1$ par le chiffre 5 (cinq comme les doigts d'une main),
$5 + 1 = 1 + 5$ par le chiffre 6 (six),
$6 + 1 = 1 + 6$ par le chiffre 7 (sept),
$7 + 1 = 1 + 7$ par le chiffre 8 (huit),
$8 + 1 = 1 + 8$ par le chiffre 9 (neuf).

Soleil fit une pause. Un rien de fatigue se lisait sur les visages de ses amis. Toutes ces nouveautés leur avaient donné le tournis. Quelques-uns tournaient la tête vers la droite, d'autres vers la gauche, d'autres encore vers le bas, et certains même levaient les yeux vers le haut. Plus personne vers l'avant, et bien sûr, ils n'étaient pas merveilleux, aucun vers l'arrière. Les sourires s'étaient effacés.

Il était temps de se reposer. Penser à plus de deux choses à la fois est impossible, alors que, parfois, penser à une seule chose, devient pénible. Cette avalanche de chiffres inédits était devenue étouffante.

En quelques jours, on avait appris ce qu'était une représentation, on avait compris qu'elle était vitale pour nous, on avait appris ce qu'était un nombre, rencontré les mouvements de translation, la manière de représenter les plus courants par des dessins appelés chiffres, symboles, il y en a toute une kyrielle, découvert le mot symétrique, mais à quoi servait-il d'ailleurs ?

Nous sommes arrivés en fin du chapitre 6, six comme samedi, le sixième jour de la semaine. On ferme. Demain c'est dimanche, on pourra bien dormir, jouer tous ensemble, toute la journée ! Et l'on vit les sourires s'afficher à nouveau sur les visages éclairés de nos petits amis.

Chapitre 7

Des nombres à n'en plus finir

Dimanche était passé. Ils avaient bien dormi. Dans les têtes, tout s'était mis en place, bien mis en place. Ajouter un à chaque pas, créer alors un nouveau chiffre et lui donner un nom est un mécanisme tout simple, et naturel. Quand Kangourou mangeait des cerises bien rouges, il les prenaient toujours de la même façon, l'une après l'autre, les mangeait une par une, et empilait les noyaux, l'un après l'autre, en un joli tas qu'il arrangeait de ses doigts. Cette addition successive et sans cesse renouvelée est la caractéristique d'un phénomène si stable qu'il peut se répéter sans fin. Et ce qui est stable éveille en nous un sentiment de sécurité, de confiance en l'avenir, qui nous rend joyeux, que nous exprimons par la joie.

Aussi, lorsque tous les petits amis rencontrèrent à nouveau Soleil, ils s'empressèrent de lui demander quel était le chiffre qui venait après 9.

Soleil répondit :
- Ah, Ah, Ah ! Voyez-vous mes amis, ce qui est remarquable, est que les seuls dix chiffres que vous connaissez :

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

vont suffire, vont permettre de représenter toute une immensité de nombres, appelés des nombres entiers.

Ce fut bouche bée et incrédule qu'on regarda Soleil. Un large et chaleureux sourire se dessina sur son visage tout rond, à la vue de tous ces petits regards subitemment étonnés.

Eh oui ! Avec ces seuls chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, nous allons pouvoir représenter une infinité de nombres. On dira donc qu'ils forment la base de la représentation, et que chacun d'eux est une unité de la base.

Mais passons. Voyez comme vous êtes puissants. Vous allez être, chacun de vous, capable de créer une infinité de nombres, quelque chose de grand comme l'univers ! N'est-ce pas admirable ? Ces quelques chiffres sont comme les doigts des mains qui permettent de façonner le monde ! Et il y en a autant que les doigts des deux mains !

On peut donc dessiner les doigts des mains, en faire une représentation à l'aide de ces seuls chiffres ! Soit !

Mais comme 0 est le mouvement nul, on ne peut rien construire avec lui, il représente en quelque sorte l'absence de doigt qui lui peut remuer, nous allons donc l'oublier un instant.

En commençant par la main gauche, mais on pourrait tout aussi bien commencer par la main droite, nous représentons par 1 le pouce, par 2 l'index, etc ..., par 5 l'auriculaire, nous continuons par 6 qui représente le pouce de la main droite, etc... par 9 l'annulaire, et il reste l'auriculaire de la main droite qui n'a pas de dessin pour le représenter, et qu'on appelle le dixième doigt des deux mains.

Ainsi neuf plus un égale dix, mais quel dessin va représenter dix ?

Il a fallu beaucoup de temps, des années et des années, et encore des années pour voir comment étaient organisés les nombres et donc pour trouver le bon dessin. On ne pouvait quand même pas créer un nouveau dessin différent de tous les autres pour représenter chacun de ces nombres alors qu'il y en a une infinité !

On a fini par comprendre que les nombres pouvaient se grouper en paquets semblables, qu'il y avait un mécanisme stable, un phénomène de répétition qui présidait à leur organisation.

Chaque doigt de la main représente un paquet de une unité. Les deux mains réunies forment un paquet de dix doigts. On pourra toujours fabriquer un autre paquet de même taille, l'additionner au premier, et recommencer ce processus.

Avec dix doigts, on fabrique un paquet d'une dizaine. Avec dix dizaines, on va fabriquer un paquet qu'on appellera une centaine. Avec dix centaines, on fabriquera un nouveau paquet qu'on appellera un millier, etc.

On part donc des unités que l'on considère d'abord une par une :

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Leur ensemble forme un paquet d'une dizaine d'unités, la dizaine de base qu'on aurait pu noter par :

$$0(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$$

Les dizaines suivantes et successives vont être représentées dans cet ordre par :

$$1(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \text{ ou encore } 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19$$
$$2(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \text{ ou encore } 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 \ldots$$
$$9(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \text{ ou encore } 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99$$

On lit sur cette présentation le dessin représentant le nombre dix. Il est formé par les deux chiffres 0 et 1, le chiffre de droite associé à la désignation d'unité de base, ici 0, le chiffre de gauche associé à la désignation d'une dizaine, ici 1. On écrit donc (enfin !) :

$$1 + 9 = 9 + 1 = 10$$

Par ajouts successifs de 1, on restera dans la même dizaine tant qu'on ne dépassera pas l'ajout de 9 unités de base.

Par abus de langage et par tradition, on appellera quelquefois et également nombre sa représentation par des chiffres.

On a ainsi obtenu un paquet d'une dizaine de dizaines, et qu'on appelle une centaine. La première centaine, ou centaine de base, rassemble la totalité des dessins (chiffres, nombres) suivants :

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39 40, ... 50, ... 60, ... 70, ... 80, ..., 89 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99.

On appelle cent le résultat de l'addition $99 + 1$. Pour en obtenir le dessin, on commence bien sûr par additionner les unités. On a vu que $9 + 1 = 10$. Par conséquent l'ajout d'une unité à 99 oblige à changer de dizaine, à passer dans la dizaine suivante qui est la dizaine porteur du numéro 10 puisque la précédente portait le numéro 9. On représentera donc $99 + 1$ par les chiffres 100.

Ce dessin n'est pas d'une interprétation difficile :
le chiffre de droite, ici 0, représente les unités, celui du milieu les dizaines, le 1 de gauche les centaines.

Ce processus de création de représentation des nombres par paquets peut se conduire sans fin.
Un paquet de dix centaines de nombres formera ce qu'on appelle un millier de nombres, mille nombres. Il n'y a pas de nom spécial pour un paquet de dix milliers de nombres, ni pour un paquet de dix fois dix milliers de nombres, qui est un paquet de cent milliers de nombres. Million désigne un paquet de dix fois cent milliers de nombres, et milliard un paquet de mille millions de nombres.

A la fin de ce long discours, nos petits amis avaient l'impression que leur tête tournait dans tous les sens : des tas de chiffres défilaient devant leurs yeux, parfois volant dans toutes les directions, comme des milliers de grains de poussière grisâtres dansant autour des rayons du soleil.

Soleil s'en aperçut, et pour leur changer un peu les idées, leur proposa de construire un étrange édifice, pour des raisons connues avant tout de lui seul.

Chapitre 8

En route vers les étoiles

Kangourou le jeune prince pouvait faire n'importe quel saut. Soleil, profitant de cette merveille, proposa à Kangourou d'aller rendre visite à Madame Proxima sa voisine.

- Grâce à la magie des nombres, je vais te faire construire un escalier peu commun qui, si tu le veux bien, te conduira chez elle, lui donner de nos nouvelles. Je suis sûr que tu seras parfaitement reçu.

Kangourou sauta de joie. Il sautait, nous le savons, aussi bien en avant qu'en arrière !
Si 2, 3 ou 100 représentaient des sauts en avant, -2, -3, -100 repésentaient les sauts qui ramenaient Kangourou à son point de départ. ll y avait donc autant de nombres dits positifs, correspondants aux déplacements vers l'avant, que de nombres négatifs, correspondants aux translations vers l'arrière.

La liste des nombres entiers se compose donc de deux parties symétriques, les entiers positifs dit aussi naturels, et les entiers négatifs : puisqu'il ne correspond à aucun mouvement, on considère souvent que 0 ne fait partie ni des entiers dits naturels qui représentent des mouvements vers l'avant, ni des entiers négatifs qui représentent des mouvements vers l'arrière. C'est un entier qualifié de neutre vis-à-vis de ces mouvements. C'est typiquement un nombre ambigü !

Sa position est centrale dans l'ensemble des entiers. Il est bien sûr le seul, l'unique à occuper une place aussi singulière : il est, la singularité de l'ensemble des entiers. Une singularité révélatrice de l'ambiguité des choses de ce monde !

Un jour, Monsieur Buridan, qui vivait au Moyen Âge, amena son âne sur zéro. C'était un âne aussi merveilleux que Kangourou : il pouvait, très têtu, décider de courir, par exemple jusqu'au nombre 10.000, comme de reculer jusqu'au nombre -100.000. Evidemment, se dit l'âne placé en position zéro, je ne vais pas rester ici, sur place, toute ma vie ! Mais que vais-je faire, aller vers l'avant, ou vers l'arrière ? Et toutes les possibilités d'aller aussi loin dans un sens ou dans un autre me sont permises : que faire ?

Zéro concentre en lui-même ces immenses possibilités d'un côté comme de l'autre, cette toute puissance, il est totipotent. A la fois rien et tout, ange et bête, au caractère ambigü comme toute chose singulière.

La liste complète des entiers qui entourent zéro est infinie. Elle contient à la fois les entiers positifs et les entiers négatifs, qui sont eux-mêmes deux sous-ensembles de nombres de taille infinie ! En fait cette liste de nombres contient, non pas seulement deux, mais une infinité de sous-ensembles infinis de nombres ! L'univers des nombres est magique.

Il n'y a, a priori, aucune règle pour montrer sur une feuille de papier ou sur un écran un petit fragment de cette liste, supposée ici écrite le long d'une ligne, comme sur un fil :

$-\infty$, ... -123456789098, ...,-5, -4, -3, -2, -1, 0 ,1, 2, 3, 4, 5, ..., 123456789098, ..., ∞

Soleil proposa à ses petits amis d'enrouler cette liste complète des entiers autour d'un cylindre infini, qui est une sorte de tube dont on ne peut jamais atteindre les extrémités. Il n'y a bien sûr que Soleil qui soit capable de bâtir un objet complet infini, au moins en imagination bien sûr, en rêve !

C'est à partir de ce tube que Soleil fit ériger ce fameux escalier, «l'Escalier de Jacob».

Alors le Prince des Kangourous, franchissant quatre à quatre, que dis-je mille à mille les marches de cet escalier, courant comme l'éclair sur cette échelle, pourra monter si haut qu'il pourra rencontrer non seulement Madame Proxima, mais aussi toutes les belles étoiles de l'univers !

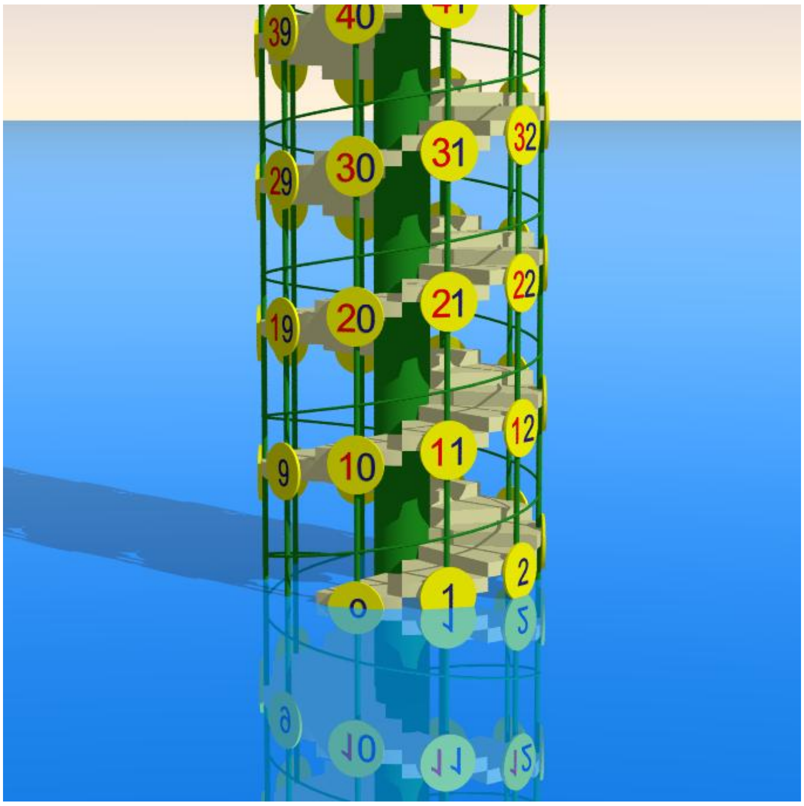
Soleil fit venir Kangourou. Il parla avec lui en ces termes :

- Place-toi en zéro mon ami, et imagine que tu vas sauter de trois vers l'avant.
- Voilà dit kangourou, je suis en zéro par la pensée, et toujours par la pensée j'imagine que je vais sauter de trois vers l'avant.
- Très bien dit Soleil. Tu vas donc t'éloigner de zéro de trois. Mais tu sais que tu peux également faire un saut de trois dans la direction opposée ?
- Bien sûr, Soleil, ne suis-je pas merveilleux ?
- Et donc, Prince des Kangourous, tu vas t'éloigner également de zéro de trois, mais cette fois-ci dans l'autre sens.
- Oui, Soleil, mais où veux-tu en venir ?
- Tout simplement à ceci. Imagine qu'un miroir soit placé en zéro. Quand tu rapproches du miroir, ton image se rapproche de la même manière de ce miroir, et quand tu t'en éloignes, ton image s'en éloigne également de la même façon. Le symétrique -3 de 3 est comme l'image à tout instant de toi-même dans ce miroir.
- Si donc je représente les entiers positifs dans l'espace, j'obtiens les entiers négatifs comme images des précédents par rapport à un miroir placé en zéro ?
- Oui, Kangourou ! Bravo ! Tu n'es pas le Prince des Kagourous pour rien !

Les joues de Kangourou se teintèrent du même rouge que celui de son noeud papillon.

Soleil adressa alors les recommandations suivantes :

«Commencez par enrouler de manière régulière autour du cylindre, et vers le haut, la partie du fil portant les entiers positifs. Imaginez qu'en zéro est placé un miroir perpendiculaire à l'axe du cylindre. Enroulez alors vers le bas la partie du fil portant les entiers négatifs de sorte que chaque entier négatif est l'image par rapport au miroir de l'entier positif dont il est le symétrique.



Puis, chaque fois que le cylindre sera en contact avec le petit morceau du fil sur lequel est inscrit un nombre, on fera une encoche dans le tube, encoche à l'intérieur de laquelle on glissera un côté d'une marche de l'escalier. L'autre côté de la marche sera soudé à une barre métallique colorée.

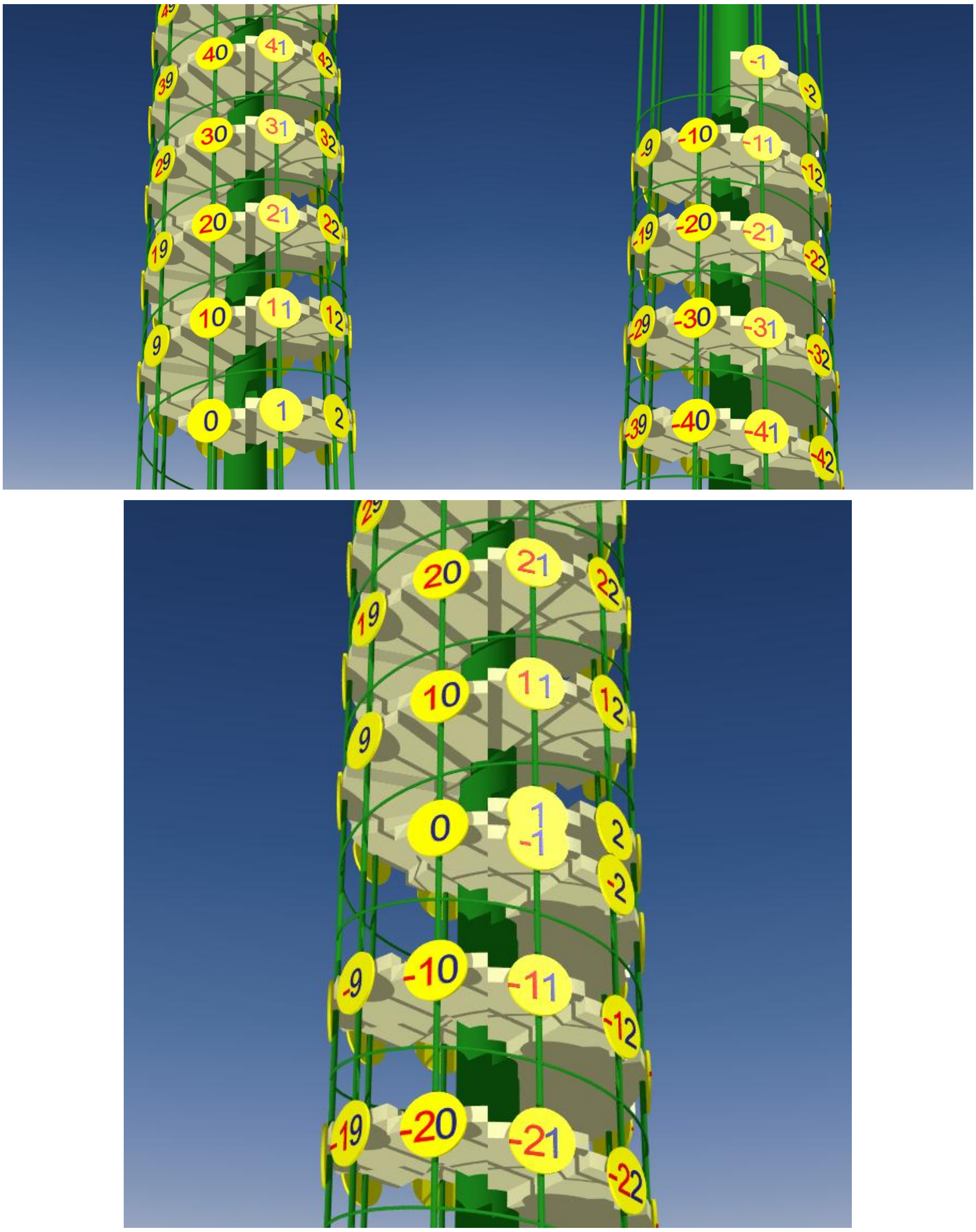
Vous disposerez de dix barres métalliques colorées, appelées des fibres, et numérotées de 0 à 9 : toutes les couleurs peuvent être différentes. Toutes ces barres, parallèles au tube, rencontrent un cercle métallique posé au sol, appelé cercle de base, et auquel elles seront soudées. L'escalier doit être très solide pour monter si haut !

L'axe du tube passe par le centre de ce cercle.

Chaque barre porte, dans un premier temps, des inscriptions de nombres qui vont de dix en dix.

Ainsi sur la barre colorée en noir et numérotée 0, on peut lire : 0 au contact du cercle métallique, puis vers le haut 10, 20, 30, ..., 100, 110, ..., 1000, 1010, ... etc jusqu'à l'infini, et vers le bas -10, -20, -30, ..., -100, -110, ..., -1000, - 1010, ... et ainsi de suite jusqu'à l'infini. Ces derniers nombres sont les déplacés, les translatés de 0 par les translations 10 et -10.

Une marche joint l'inscription 10 sur le tube central à l'inscription 10 sur la barre noire. Il y a autant de marches de cette sorte que d'inscriptions sur la barre noire. Pour avoir une idée de la quantité d'inscriptions qui figureront sur cette barre, du travail que vous aurez à faire, vous supprimerez dans un deuxième temps le zéro des unités sur chacune de ces inscriptions. On lira alors, vers le haut, 1, 2, 3, etc, et vers le bas, -1, -2, etc. Conservant le zéro sur la barre au contact du cercle de base, sera donc inscrite sur cette barre la liste complète des nombres entiers.



Images Jos Leys

Ainsi, l'ensemble infini des entiers tracés sur le tube contient, augmenté du zéro de la base, l'ensemble infini des translatés de 0 : ces deux ensembles infinis portent pourtant exactement les mêmes nombres ! Qui contient l'autre ?

Avec chacune des neuf autres barres, le phénomène observé sera le même. On peut donc se contenter de voir ce qui se passe sur la barre par exemple rouge sur laquelle sont inscrits d'abord vers le haut : 1, 11 = 1 + 10, 21 = 11 + 10, ... et vers le bas : -1, -1 + (-10) = -11, -11 + (-10) = - 21, ... c'est-à-dire les translatés de 1 et -1 par 10 et -10. 0 ne figure pas ici.

Une marche joindra l'inscription 1 sur le tube central à l'inscription 1 sur la barre rouge. Il y a autant de marches de cette sorte que d'inscriptions sur la barre rouge.

On supprimera dans un second temps le 1 des unités figurant dans toutes les inscriptions ayant au moins deux chiffres. On observera alors sur la barre rouge les inscriptions :

$-\infty$, ... -12345678909, ...,-5, -4, -3, -2, -1, -1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 12345678909, ..., ∞

Le zéro ne figure pas, mais par contre, sont présents deux 1 et deux -1, et puis tous les autres nombres entiers. Il y a donc une inscription supplémentaire sur cette barre, par rapport à celles qui figurent sur la liste des entiers ! Et pourtant cet ensemble d'inscriptions est, à l'écriture près, le même que celui qui figure initialement sur la barre, où le zéro n'apparaît pas...

En remplaçant les 1 et -1, par 2 et -2, 3 et -3, ..., 9 et -9, on obtiendra les 8 autres listes d'inscriptions sur les 8 autres barres, et l'on observera les mêmes phénomènes inattendus.»

L'ensemble des inscriptions sur le tube central contient toutes les inscriptions qui figurent sur les 10 barres métalliques. A vrai dire, si d'un infini, on parvient à extraire un infini qui lui est égal, la répétition sans fin de ce processus sur le dernier infini créé conduit à énoncer que cet infini se contient une infinité de fois.

On n'en a pas fini de gloser sur l'infini, pensait Soleil !

Chapitre 9

Kangourou pense à être architecte

Comme l'avait espéré Soleil, la construction du grand et magnifique escalier de Jacob eut une grande influence sur Kangourou. Il rêva de devenir lui aussi architecte.

Bien comprendre d'abord la structure de cet escalier, telle a été sa démarche. Et comme chaque marche de l'escalier correspond à un nombre entier, il décida d'examiner en détail la structure de cet ensemble des nombres entiers.

La feuille de papier devant lui, le crayon à la main - en ce temps, la tablette était inconnue ! - Kangourou ne bougeait pas, l'esprit apparemment vide, la pensée muette. Il finit par jeter un coup d'œil par la fenêtre, l'escalier, devant lui, exposait sa splendeur. Un peu de chaleur lui monta aux joues : cet escalier était devenu une sorte d'ami, sa présence, tout près, le réconforta. Il le regarda, de bas en haut et de haut en bas, si riche en couleurs ; petit à petit son esprit se réchauffa, et se mit à mouvoir lui aussi.

Des bribes de souvenirs affluèrent, se mélangèrent, s'organisèrent, confortés parfois par un simple regard sur l'escalier. Il y avait des propriétés apparemment particulières, mais d'autres qui semblaient plus générales, plus universelles en quelque sorte.

Il fit cette réflexion que les propriétés les plus générales, qui sont vraies peut-être partout et toujours, sont de ce fait sans doute les plus intéressantes ! Ce sont donc les plus fréquentes, les plus utilisées qu'il faut mettre en évidence, faire ressortir !

Il nota sur sa feuille :
«1 - Les marches de l'escalier, les groupements de marches consécutives, sont des objets de même nature. Tous ces mouvements auxquels ils sont intimement associés, ces sauts que je fais, ces translations de Sphalos, sont également des objets de même nature. Tous les dessins et nombres qui les représentent sont tous également de même nature.
Et ces ensembles d'objets différents, notamment les deux derniers, me semblent partager les mêmes propriétés.

2 - En partie grâce à cette sorte d'homogénéité de leurs constituants, je peux en effet composer, additionner entre eux les éléments appartenant à ces ensembles. Une translation suivie d'une translation est encore une translation ; 1 plus 1 est encore un nombre, 2. Et je peux faire ces compositions entre translations et ces additions entre nombres sans fin.

3 - Ces ensembles possèdent aussi tous deux un élément dit «nul» : composée avec la translation nulle, une translation quelconque reste invariante ; l'addition de 0 à un nombre quelconque le laisse invariant.»

Après avoir écrit toutes ces lignes, Kangourou éprouva le besoin de reposer un instant sa main, et son esprit. Il posa son crayon, jeta à nouveau un coup d'œil sur son escalier, puis sur sa feuille. Ai-je bien tout vu, se dit-il ? La réponse vint aussitôt : Mais non ! et il écrivit, pensant «je peux faire des sauts en arrière» :

«4 - A tout mouvement de translation est associé un mouvement de translation symétrique de sorte que leur composition est la translation nulle. Tout nombre possède un symétrique, l'addition du nombre et de son symétrique est le nombre nul.»

Kangourou posa à nouveau le crayon sur la table et se redressa. Il se sentait un peu fatigué, mais avait l'impression, le sentiment d'avoir bien travaillé. Il était en somme assez content de lui. Les minutes passant, un soupçon d'inquiétude lui traversa l'esprit. Ai-je bien vraiment tout dit, ce que j'ai observé est-il bien exact ?

Il se leva soudain. «On verra bien demain» dit-il à haute voix, et il sortit.

Chapitre 10

La très belle découverte

Kangourou se sentait agité. N'avait-il pas annoncé qu'il voulait devenir architecte ? Mais que fait un architecte ? Sa vision de l'architecture restait obscure. Ce qu'il avait entreprit convenait-il, était-ce raisonnable ? Ce qu'il avait écrit se rapprochait-il des «abstract non senses» dont il avait entendu parler sans savoir ce qu'il y avait derrière ces mots, des bêtises en quelque sorte ?

Il éprouva le besoin d'aller s'épancher auprès de quelqu'un, de se délivrer de tous ces soucis. Il aperçut son grand copain Sphalos, affalé sur son siège, à la terrasse d'un théé. Il faut savoir qu'il n'y a pas de cafés au pays des kangourous. Les kangourous sont plutôt herbivores, nul ne les surpasse dans la connaissance des plantes, avec lesquelles ils préparent de merveilleuses boissons chaudes. Sphalos le can(ul)ard, qui aime bien les milieux liquides, était donc attablé à la terrasse d'un théé.

Un grand sourire éclaira le visage de Kangourou. Un grand sourire éclaira le visage de Sphalos.

Tout en buvant avec précaution son spécial thé très parfumé, Kangourou fit part à l'attentif Sphalos de ses projets incertains, de ce qu'il avait déjà fait, de ses petits soucis. Sphalos resta silencieux un moment, puis dit soudain :

- Coin-coin, et si nous regardions ensemble ce que tu as déjà écrit ? Soit tu as raison, soit tu as tort et si je te donne raison alors que tu as tort, nous serons tous les deux des imbéciles. Comme disent les Corses, nous serons tous deux dans la bourbe, aqui. Qu'en penses-tu ?
- Tu as bien raison ! D'accord pour te montrer ce que j'ai déjà écrit.

Les tasses de thé furent instantanément vidées.

Sphalos relut avec lenteur le texte de Kangourou. L'impression était bonne. Que pouvait-on modifier, retrancher, ajouter ? Sphalos prenait son temps. N'avez-vous pas remarqué combien les canards, au bord de la mare, peuvent rester longtemps pensifs et méditatifs ? Kangourou, lui, s'agitait, accomplissait de petits sauts, mais en ce moment circulaires, n'était-il pas merveilleux ?

Sphalos pensait, lui, aux manières selon lesquelles ils se déplaçaient tous deux. Par exemple, ils pouvaient d'abord associer les mouvements 2 et 1, c'est-à-dire considérer la translation de 2 suivie de la translation de 1 comme un seul bloc. Ce bloc noté $(2 + 1)$ est comme une translation de 3. On peut ensuite la faire suivre d'une nouvelle translation, par exemple de 3 encore. Mais le résultat final est le même que s'ils accomplissaient la translation 2 suivie du mouvement 1 + 3, qui est comme la translation 4, soit :

$$\begin{gathered}(2+1)+3=2+(1+3)\\ 3+3=2+4\end{gathered}$$

Sphalos et Kangourou étaient bien d'accord : pour tous leurs déplacements, on pouvait associer les éléments en blocs plus ou moins grands, permettant d'obtenir des écritures plus condensées. Au lieu d'écrire :

$$1+1+2+1+2$$

on pouvait tout aussi bien écrire

$$\begin{gathered}1+(1+2+1)+2\\ (1+1)+(2+1+2)\\ (1+1)+5=1+(1+5)=1+6=7\end{gathered}$$

Ils appelèrent cette propriété des nombres l'associativité, et estimèrent dans leurs discussions que les nombres avaient de remarquables propriétés de stabilité, aussi étonnantes que celles des années, des ans qui, sans défaillance, se succédaient les uns après les autres. Quelle fut leur surprise quand ils remarquèrent que les trois lettres qui composaient «ans» désignaient aussi les propriétés principales de ces nombres : a comme associativité, n comme élément neutre, s comme symétrie !

Un rien superstitieux, ils se dirent que l'examen des propriétés structurelles de ces mouvements et de ces nombres qu'ils venaient de faire défieraient sans doute le passage des ans.

Pendant tout le temps de leurs échanges, Sphalos était resté plutôt gentiment assis. Kangourou, lui, allait et venait, revenait sur ses pas, tournait même parfois sur lui-même en agitant les bras.

Soudain, comme Kangourou tournait en rond, nos deux compères pensèrent au mouvement de rotation. Et si, au lieu de nos mouvements de translations rectilignes, nous regardions les propriétés des mouvements de rotation ? Auraient-ils bien les mêmes propriétés que les mouvements de translations ? Ce serait confirmer ce qu'avait dit Soleil : tout nombre représente un mouvement, une transformation.

Instinctivement, ils penchaient vers l'affirmative. Le cercle n'est-il pas simplement un fil dont on soude les extrémités ? On pouvait bien faire en effet une rotation après l'autre, les composer, s'abstenir de tourner, tourner en sens inverse et revenir à son point de départ.
Mais en tournant les bras dans l'air, dans l'espace qui nous environne, ils s'aperçurent avec surprise que, parfois, l'ordre de la succession des rotations modifiait le résultat. Alors que $1+2=2+1$, il arrivait que composer la rotation A avec la rotation B aboutissait à un état différent de celui que donnait la composition de B avec A !

Ca alors ! S'exclamèrent-ils ensemble.

Qu'on ait toujours avec les entiers $3 + 4 = 4 + 3$, que l'on commute la position des entiers quels qu'ils soient ne change rien au résultat final, est une propriété à laquelle ils n'avaient pas porté attention.

Ils savaient bien, quand ils prenaient leur petit déjeuner le matin, qu'on n'obtient pas tout à fait le même résultat quand on met du miel sur une tartine beurrée ou du beurre sur une tartine déjà recouverte d'une épaisse couche de miel blond.

Ils téléphonèrent à Soleil pour lui faire part de leurs trouvailles.

Soleil, d'abord surpris, stupéfait, rayonna de bonheur.

Félicitations, mes amis ! Vous avez tous deux découvert ou plutôt redécouvert l'une des architectures du monde parmi les plus intéressantes. On l'appelle la structure de groupe.

Elle vous permettra de réaliser mille choses dont vous n'avez point idée, de faire des voyages magnifiques, de créer des décors enchanteurs que vous ne cesserez d'admirer, et surtout de mieux comprendre l'étonnant univers dans lequel vous vous épanouirez.

Je vous embrasse !

Notes historiques

Page 5
L'auteur voudrait d'abord adresser ses remerciements émus à l'étudiant et/ou aux étudiants qui, pour son premier Noël proprement universitaire, lui ont offert ce merveilleux Kangourou, lequel a bien voulu accepter de se laisser photographier pour vous. J'avais évoqué, au cours de mon premier cours en amphithéâtre fait devant des étudiants et donc devant eux, plus de 20 ans avant la naissance de http ://www.mathkang.org, les prouesses de Kangourou. Elles seront rappelées dans ce texte, pour illustrer et rendre plus vivants des propriétés et des faits élémentaires, généraux, malheureusement souvent desséchés par la belle mais abrupte, insensible et hautaine, présentation axiomatique.

Page 5
Extrait de Wikipédia :
« Les kangourous se déplacent par bonds avec beaucoup de subtilité, leur vitesse de course est variable plutôt lente en général de l'ordre de 20 km/h, et peuvent alors parcourir de longues distances en faisant de petits bonds.
Ils peuvent aussi se déplacer à une vitesse plus rapide de 40 km/h en réalisant des bonds spectaculaires. Les kangourous peuvent bondir jusqu'à 3.5 mètres de haut, et 13.5 mètres de long.
Lors d'un réel danger, en terrain découvert devant un prédateur par exemple, ils peuvent prendre la fuite très rapidement jusqu'à 64 km/h pour les kangourous gris et 70 km/h pour les kangourous roux.
Les adultes n'ont pas vraiment de prédateurs grâce à leur force au combat, leur grande rapidité et leur agilité à bondir, cependant les animaux faibles, malades, âgés ou trop jeunes sont la proie des dingos. Les adultes sont très puissants, et peuvent tuer des dingos, leurs coups sont encore plus puissants que ceux des autruches.»

Page 5 et suivantes
Sur les dessins des chiffres et leur histoire, on peut consulter : Histoire universelle des chiffres, Seghers, puis Bouquins chez Robert Laffont, t. I et II, 1994.

Page 9
Le premier auteur - qu'en était-il peut-être de ses prédécesseurs ? - le premier auteur donc à avoir attiré l'attention de ses contemporains sur l'activité de représentation exercée par les hommes est Platon. Platon, très pédagogue, utilise le procédé consistant à créer un mythe pour présenter ses points de vue. Le mythe auquel en l'occurrence il fait appel est celui, devenu fameux, appelé «Le Mythe de la Caverne». Platon l'expose dans son ouvrage bien connu La République, dès le début du chapitre VII.
Dans un texte en voie de rédaction, j'espère convaincre de la généralité du phénomène. Voir aussi le chapitre 1 de l'ouvrage cité dans l'article Page 13 qui suit.

Page 13
Sur ce qu'est un nombre, j'espère aussi avoir répondu tant à Vladimir Arnold qu'à Poincaré dans ces deux textes, surtout dans le second : http ://www.vigdor.com/titres/bruterCPConsNom.htm et http ://arpam.free.fr/DuNouveauDuCoteDesNombres/Quadrature.pdf
Selon P. Valéry, «Poincaré doutait que l'on puisse définir le nombre». Tout dépend évidemment de ce que l'on entend par définition.

Page 17 et suivantes
La saisie de l'infini n'a cessé de hanter les hommes. Les lignes et les textes consacrés à l'infini, sans être infinis, sont toutefois terriblement nombreux. Tombent de ma bibliothèque par exemple ces trois ouvrages assez récents :
Jean-Marie Lardic, L'infini entre science et religion au XVIIe siècle, Vrin, Paris,1999.
Philippe Lauria, Cantor et le transfini, L'Harmattan, Paris, 2004.
Tony Lévy, Figures de l'infini, Les mathématiques au miroir des cultures, Seuil, Paris, 1987.

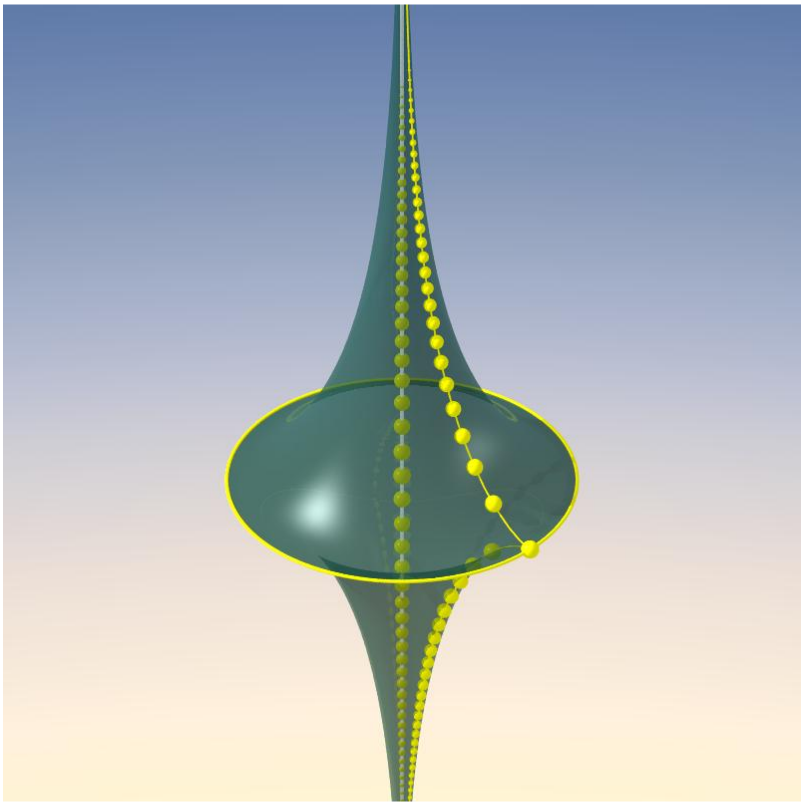
L'enseignement secondaire ne m'a jamais parlé de l'infinité du nombre : est-ce pour ne point faire peur ? Je reprends dans le chapitre 1 de l'ouvrage cité dans l'article Page 13 qui précède, ces lignes toujours de P. Valéry : «Vu Estaunié. Me dit que, enfant à 6 ans, il avait appris à compter jusqu'à 6 - en deux jours. Il compris alors qu'il y avait 7, etc., et il prit peur qu'il fallût apprendre une infinité de noms. Cet infini l'épouvanta au point de refuser de continuer à apprendre les autres nombres.»
Le choix du contenu de cet opuscule n'est pas totalement étranger à la signification de cette anecdote.

Page 21
Par convention, je considère également comme singularité l'équivalent de tout élément neutre d'un objet possédant une ou plusieurs symétries. Ainsi, 0 est la singularité de la droite discrète composée de tous les entiers - et reposant sur la droite continue des réels.
Cette droite est située dans un plan. On peut la déformer par une application plan sur plan continue qui envoie $(0, 0)$ sur une singularité au sens classique de la courbe image. Par exemple, dans les cas simples, la déformée de la droite est une parabole, une gaussienne, une parabole semi-cubique (cusp), une tractrice. Par rotation de ces courbes autour de la droite des réels par exemple, on fabrique des surfaces qui sont des déformations de cylindres à axe horizontal : elles peuvent donc également servir à la construction d'escaliers infinis non cylindriques, au contraire des escaliers traditionnels.
Sur le rôle de la singularité en tant que métaphore de l'ambiguité, cf par exemple l'article «Théorie des catastrophes et ambiguité» (http ://arpam.free.fr/TCA.pdfsite de l'arpam). Dans la classification des singularités, la singularité de type cusp est la plus primitive : toute déformée de cette singularité respectant la symétrie donne une représentation des situations ambigues archétypes.

Page 29
L'auteur a oublié de préciser que Sphalos était un canard grec, fort nul, ce dont tout le monde s'est aperçu. Dans le patois aveyronnais, ici se dit aqui. Les savants linguistes sont parvenus à établir les origines de ce terme. On a supposé ici qu'il figure dans la langue corse.

Page 31
Ce conte s'adresse à tous les enfants, c'est-à-dire aux enfants de tous âges, sans limitation aucune. L'ouvrage intitulé Comprendre les Mathématiques ne compte que $1 + 2 + 3 + 4$ chapitres sur les mathématiques, seules 10 folies s'élèvent dans le parc mathématique : ce texte introductif, en

hommage aux rêveurs pythagoriciens, présente ce même caractère décimal.
Parmi les raisons qui en motivent le contenu, les deux suivantes restent à l'état subliminal, elles se présentent sous forme d'aphorisme :
- Les gens sérieux ne sont pas sérieux, ou encore les gens pas sérieux sont sérieux.
- Les hommes comprennent très vite, mais il faut leur expliquer plus longtemps encore.
Tout conte participe du rêve réparateur. La présence d'éléments loufoques l'accompagne fréquemment. Présents afin de divertir et reposer le lecteur, il arrive dans ce texte qu'ils pointent leur nez.
Parmi les concepts de base de la philosophie de l'auteur, celui d'énergie et celui de stabilité. Platon était à deux doigts d'introduire ce dernier dans le panthéon des Idées. Il n'a pas encore son héros. Soleil, dans ce texte, le dieu Ra des savants égyptiens, représente l'énergie sous sa forme lumineuse : nous lui devons en partie la vie et d'apercevoir le monde.



Images Jos Leys

L'escalier de Jacob que parcourt le Prince des Kangourous est globalement de forme cylindrique. Le regardant vers l'infini, il paraît s'amincir de plus en plus au point de disparaître. L'image présente de Jos Leys traduit cette impression. Les petites boules sur l'axe central de la figure illustrent les nombres entiers gravés sur le tube central de l'escalier. Celles qui sont inscrites sur le méridien visible de la surface illustrent les entiers de dix en dix gravées sur la barre verticale de l'escalier passant par le zéro du cercle de base.

Cette élégante surface est une représentation de ce que les mathématiciens appellent une pseudo-sphère, d'autres plus humoristes une pseudo-trompette. Elle est une manière de déformer un cylindre et renvoie à la «Note historique» intitulée page 21.

L'auteur a le plaisir de remercier Denise Chemla qui a spontanément mis au format Latex le texte original, et Jos Leys qui a bien voulu l'illustrer.

Quelques concepts

Gometz-le-Chatel, le 15 Octobre 2012

LES DÉLICIEUSES

GLISSADES

DE

SPHALOS

Claude-Paul BRUTER

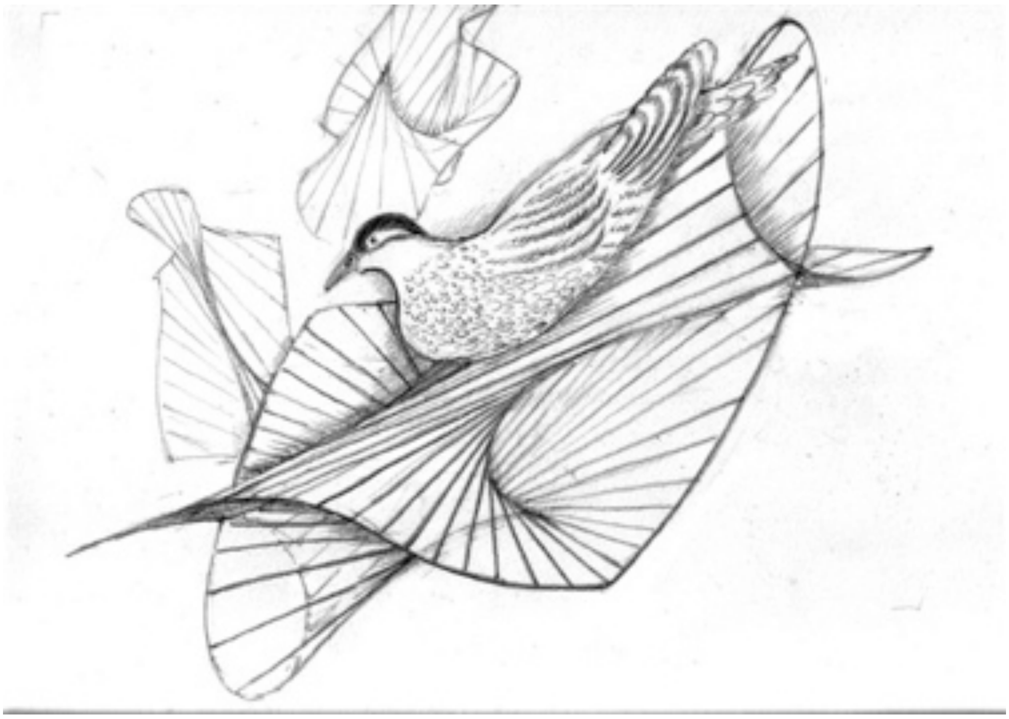
dessin et illustrations

Anatoly FOMENKO

Patrice JEENNER

Dmitri KOZLOV

Jos LEYS



Sphalos glissant sur un espace fibré

Crayon de Patrice Jeener

Chapitre 1

SPHALOS ET KANGOUROU APPRENNENT QU'ILS SE DÉPLACENT SUR UN ESPACE FIBRÉ

Soleil, en cette heure matinale, était de bonne humeur. Caché encore derrière la montagne, il nous faisait coucou : « Je suis là, je suis là ! » disait-il. S'élevant derrière les sommets, son faisceau de rayons blancs effaçait le noir intense de la nuit, et déjà teintait le ciel d'un bleu léger.

La fenêtre grande ouverte, Kangourou et Sphalos, silencieux, recueillis, admiraient le travail éclatant de leur ami Soleil. Certains rayons étaient plus visibles que d'autres, mais quand même si nombreux que ni Kangourou ni Sphalos réunis ne parvenaient à les compter. Ils se rassemblaient même parfois en longs filaments, s'étirant, nonchalants, dans le ciel éveillé.

Soleil salua nos amis.

- Ne sont-elles pas belles, mes fibres lumineuses ? s'enquit-il

- Oh ! Que si, lui fut-il répondu. Mais comment fais-tu, Soleil, pour remplir si aisément tout l'espace du ciel de tes rayons, de tes fibres dis-tu ?
- Oh les coquins ! Ils veulent connaître tous mes secrets ! Je ne vous les dirai pas tous ! Disons d'abord que je possède dans ma cave, au sous-sol, quelques gros bidons d'énergie, dont je remplis une grande cocotte-minute de ma fabrication. Et dans ma cuisine je chauffe, je chauffe, et encore je chauffe très très fortement je vous l'assure. Vous comprenez bien maintenant pourquoi vous me voyez si rouge, pourquoi je suis si méritant ! Mais je vous remercie, non moins chaleureusement, croyez-moi, de la reconnaissance que vous me témoignez.

Bon, revenons à notre cocotte spéciale, si chaude, si brûlante, vous n'en avez pas idée. Je la laisse à peine refroidir, alors l'énergie initiale se brise ou plutôt se cristallise en un nombre immense de particules ou plutôt de sous-particules diverses, si petites, si infimes qu'on ne les voit même pas avec un microscope ! En tout cas, je puis vous assurer que cette soupe est très riche du point de vue calorique.

J'ouvre alors toutes les soupapes qui peuplent ma cocotte de sorte qu'elle fait pschitt dans toutes les directions, envoyant notamment autour d'elle, et dans tout l'espace, les semi-particules de lumière qu'elle contient. Ce sont elles que vous voyez formant ces longues traînées de fibres plus ou moins fines, les plus fines étant justement les rayons rectilignes lumineux, des droites selon l'apparence.

et le Soleil de conclure majestueusement

Ainsi, mes amis, la totalité de l'espace autour de vous est un espace fibré !

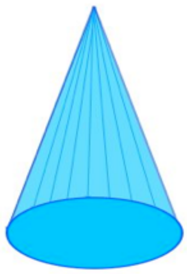
Kangourou et Sphalos regardèrent Soleil, médusés.

- On ne savait pas que tu étais aussi cuisinier, Soleil, spécialiste de la soupe à semi-particules ! finirent-ils par lui répondre. Mais pourquoi parles-tu de semi-particules ? C'est comme du chinois pour nous !
- Je vous dirai peut-être un jour les transformations internes qui s'accomplissent dans la cocotte, et vous montrerai quelques-unes de ces semi-particules un peu étranges, ambiguës en quelque sorte.

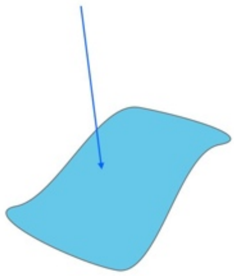
  Etranges et ambiguës, car elles se présentent un peu comme le dieu Janus des Romains dont les faces du visage, celle de droite et celle de gauche, sont bien différentes. Si vous suivez une semi-particule dans son déplacement, vue d'un certain côté, elle semble être une particule matérielle, très petite bien sûr, comme une pointe de métal, encore plus petite que la plus infime à laquelle vous pourriez penser ; mais vue de l'autre côté, elle se déplace comme une danseuse, une danseuse attirante, comme celles qui pratiquent parfois langoureusement la danse du ventre, ondulant comme une onde.

  Mais oubliez tout ça pour l'instant, et regardez votre ciel, les rayons lumineux qui le peuplent, échappés de la cocotte-minute par une soupape pas plus grosse qu'un point, tenez, je vous dessine un petit pan de ciel ayant la forme d'une pièce de monnaie, d'un disque, et quelques rayons sortant par la soupape et frappant le bord du disque circulaire :

S



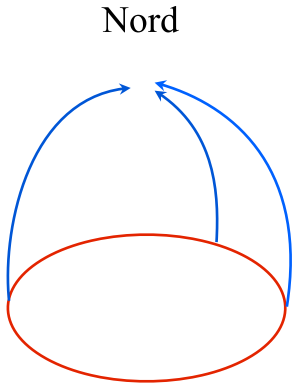
Que l'apparence donnée par cette image, par ce cône de lumière, ne vous trompe pas : c'est chaque point du disque qui est frappé par un rayon lumineux issu de la soupape S, comme veut le dire cette autre image :



- Il est joli ton dessin, dirent en coeur Sphalos et Kangourou. Mais qu'entends-tu par espace ?
- Oh ! C'est très simple, c'est un lieu dans lequel on peut se promener, sur la terre par exemple, dans ce parc, à pied, en voiture, ou bien sur ce mur, sur cette falaise, sur cette montagne en faisant de l'escalade, un lieu plus généralement dans lequel ou sur lequel on peut se déplacer, comme dans ou sur la mer, les océans, ou comme dans le ciel.
- Un lieu donc sur lequel ou dans lequel on peut se déplacer, soit ! Et tu dis que n'importe quel de ces espaces est fibré ? Mais là, nous ne comprenons pas très bien ce que tu veux dire. Nous avons entendu raconter que certains avaient la fibre artistique, que chez d'autres on apportait la fibre optique, que d'autres encore devaient manger davantage de fibres alimentaires. Le chocolat est-il une fibre alimentaire ? Nous sommes perdus dans cet imbroglio de fibres. En dehors des fibres lumineuses, des rayons lumineux dans le ciel que tu appelles également des fibres, nous ne voyons rien de tel en regardant par terre.
- Je comprends votre embarras, répondit Soleil. On emploie ici ce mot fibre dans un sens imagé. Vous savez que le tronc d'un arbre se compose de filaments très allongés formés de cellules accolées les unes aux autres, les biologistes les appellent des fibres. Quand on dit qu'un espace est fibré, on sous-entend qu'on peut le remplir de fibres plus ou moins imaginaires.

  Tenez, prenez la surface de la demi-terre, on l'appelle une demi-sphère ou un hémisphère, celle qui, par exemple, va de l'équateur jusqu'au pôle nord. C'est bien un espace puisque vous pouvez aller et venir comme bon vous semble sur cette demi-sphère. Son équateur est un cercle, n'est-ce-pas ?

- Oui, un très grand cercle, on nous a dit qu'il était très long, deux jours d'avion, et en plus il y fait très chaud toute l'année !
- Voyons kangourou, toi qui sautes si merveilleusement, il ne te faudrait pas deux jours pour revenir en ton point de départ !
- C'est vrai, Soleil, répondit Kangourou. Mais que vient faire le cercle dans ton explication que l'espace sur lequel nous déplaçons tous les jours est un espace fibré !
- Voici : un espace fibré est un domaine dans lequel une partie s'appelle la base, et le reste les fibres. L'équateur, le cercle, est ici la base. C'est de la base que partent toutes les fibres.



Dans le cas présent, une fibre est une ligne dessinée sur la demi-sphère, et que suit un touriste partant d'un endroit de l'équateur et se rendant au pôle nord. Je n'en ai dessiné que trois, mais il y a autant de fibres que de points de la base, de sorte que l'ensemble de toutes les fibres recouvre complètement notre hémisphère nord.

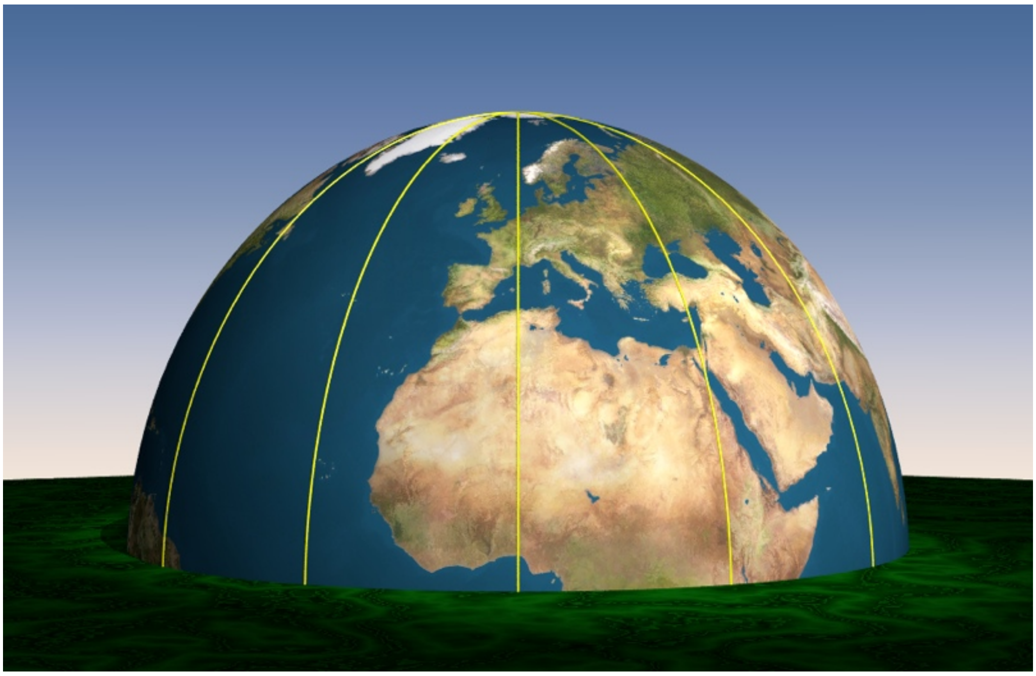


Illustration de quelques «fibres» par Jos Leys

Êtes-vous d’accord, mes amis, que l’hémisphère nord, ou sud d’ailleurs, peut être vu comme un espace fibré dont la base est l’équateur ?

- Oui, répondirent ensemble et joyeusement Sphalos et Kangourou, tu nous a convaincus. L’hémisphère est bien un espace fibré dans ton sens. Mais laisse-nous réfléchir, et voir si, par nous-mêmes, nous ne pourrions pas trouver d’autres espaces qui soient fibrés comme tu le dis. Mais sais-tu que tu as été bien long, et que nous n’avons pas encore pris notre petit déjeuner ?

- Oh, pardonnez-moi, mes amis. Je comprends mieux à mon tour pourquoi, parlant de fibres, tu as évoqué le chocolat. Allez le boire plutôt, et n’oubliez pas de manger aussi des céréales : elles contiennent beaucoup de fibres excellentes pour la santé.

Chapitre 2

LE POINT DE VUE DE SIRIUS

Ils étaient pressés de sortir. Le chocolat bien chaud goulûment bu, les céréales avalées, Kangourou et Sphalos chaussèrent rapidement, et mirent leur nez dehors, skis sur l'épaule pour Sphalos, snowboard sous le bras pour Kangourou. Soleil illuminait la vallée, la neige étincelait sur les sommets. Kangourou sauta vers le sommet du Mont Sirius. Plus placidement, Sphalos se laissa tirer par le tire-fesses. Du siège de sa remontée mécanique plus rapide, Céphaline lui fit coucou de la main.

Céphaline était leur copine préférée. Elle riait des garçons, et avec les garçons, les aidait autant qu'elle le pouvait, mais n'en pensait pas moins. Ses yeux pétillaient d'intelligence, elle fascinait son entourage. Pour l'heure, bien emmitouflée, elle montait elle aussi vers la pointe du mont Sirius. Elle s'y rendait pour la première fois.

- Que c'est beau ! dit-elle admirative à ses compagnons quand ils furent réunis tous les trois, pivotant sur elle-même pour saisir du regard les étendues de neige silencieuses qui filaient sous ses pieds.

Le Mont Sirius était célèbre. C'était l'endroit où, paraît-il, il fallait aller pour mieux comprendre les choses de ce monde. Et cela dans tous les domaines. Qui est au pied de l'arbre, à la porte de la maison, ne peut imaginer l'étendue de la forêt, l'organisation du village.

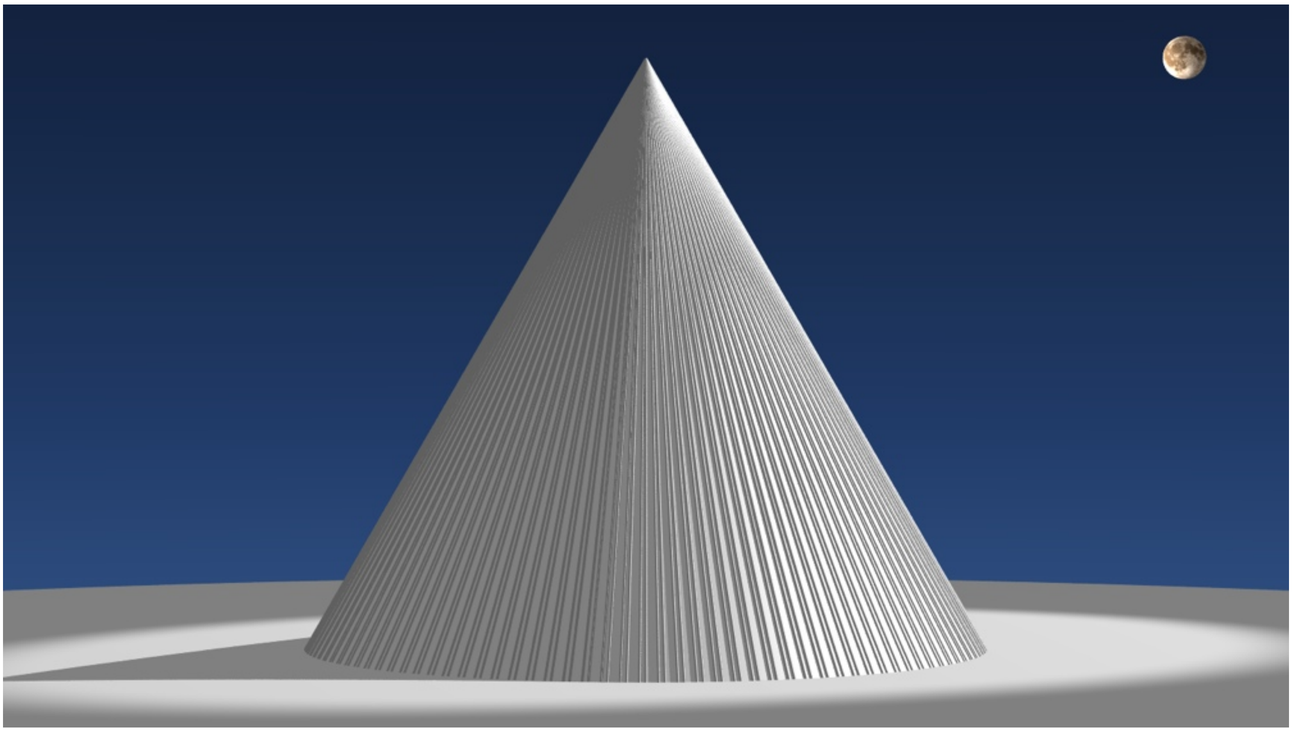
Du sommet pointu, le spectacle était magnifique : on dominait les montagnes avoisinantes, les festons bleutés ou scintillants qu'elles dessinaient dans le ciel épuré, on voyait loin, très loin. Aussi, l'hiver, les meilleurs skieurs s'y donnaient rendez-vous. Et en cette saison, on y voyait même le joyeux Père Noël habillé tout en rouge !

Ce jour-là, de tous côtés, partaient des traces de ski. Pour être grisés par la vitesse, les skieurs aux combinaisons multicolores partaient tous selon la ligne de plus grande pente, le regard tendu, tout schuss, sans dévier un instant de la trajectoire rectiligne sur laquelle ils étaient lancés. Ce n'est que bien plus bas, à l'orée des bois de sapins, près des remonte-pentes, qu'ils viraient en dérapage et s'arrêtaient enfin.

Kangourou et Sphalos se regardèrent soudain. La même pensée s'était formée dans leur esprit. La conversation, quelques heures plus tôt avec Soleil, le dessin qu'il leur avait montré de ce faisceau en éventail de lignes de lumière qui s'échappaient d'un point du disque solaire, de ce cône de lumière avait-il dit, les avaient marqués. La présence de Céphaline les rendirent très savants.

- Regarde, lui dirent-ils, ici au sommet, sur la pointe de Sirius, nous sommes en la singularité d'un cône, c'est la forme du Mont Sirius aujourd'hui enneigé. Un cône de neige, et non pas un cône glacé ! Que préfères-tu, manger de la neige ou manger de la glace ?
- Les glaces de Bertillon sont délicieuses, mais emplir la bouche de neige fraîche apporte une sensation extraordinaire que nulle glace ne parvient à donner !
- Tu veux y goûter maintenant ?
- On verra peut-être plus tard, dit-elle, en s'empressant de s'élancer sur la pente. Ah ! ces garçons! Indécrottables ! pensa-t-elle.

Ils la suivirent aussitôt, Sphalos en glissant, Kangourou en sautant. Ils filaient droit tous les trois, Kangourou et Sphalos constamment songeant que les traces qu'ils laissaient derrière eux étaient analogues aux rayons que le soleil dardait sur la surface du cône de lumière. Aujourd'hui, le Mont Sirius, ce cône de neige était bien un espace fibré. Du moins, grâce à nous les skieurs, on en voyait bien les fibres qui, en surface, partaient du haut, et arrivaient tout en bas.



Silence et Nuit sur le Mont Sirius

Illustration par Jos Leys

Chapitre 3

UN GOÛTER ELLIPTIQUE

Ils avaient skié toute la journée. Il était près de cinq heures, le ciel se grisait déjà, une petite faim et soif les tiraillaient. La perspective d'un goûter les agitaient.

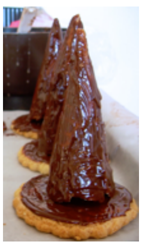
«Pâtisserie du Mont Sirius, Spécialités de Cônes». Cépahaline, Kangourou et Sphalos étaient fascinés. C'était décidemment une journée singulière, une journée conique ! Soleil leur avait parlé de cône le matin, en skiant l'idée de cône les avait poursuivis, et voici que maintenant, ils découvraient, en ce moment propice à la gourmandise, une pâtisserie spécialisée dans la fabrication de friandises diverses ayant toutes des formes coniques, et évidemment illuminée de lumières ayant toutes également des formes coniques ! Même les flammes avaient cette forme captivante ! Comment résister ?

Ils réunirent les quelques sous qu'ils avaient en poche et entrèrent.







Assis autour de la table, chacun s’affaira avec attention et délicatesse sur le contenu de son assiette. Ils savouraient le plaisir d’être ensemble, de partager les impressions gustatives que leur apportaient ces pâtisseries originales. Chacune d’elle était analysée dans sa composition, dans sa texture, dans sa forme. Ils s’amusaient à les comparer.

- Mon cône est plus allongé que le tien, fit remarquer Kangourou s’adressant à Sphalos.

- Ah oui, mais la partie ronde de l’assiette sur laquelle repose le mien est plus étendue, on l’appelle un disque n’est-ce pas ?

- Tu as raison, ce disque est la base de ton cône plein de chocolat, mais si le chocolat fond un peu, ton cône va prendre la forme de la pâtisserie verte de Céphaline qui ressemble plus à un hémisphère qu’à un vrai cône !

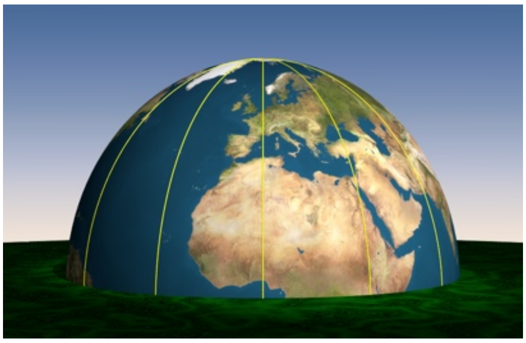
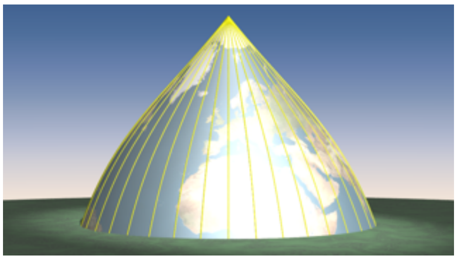
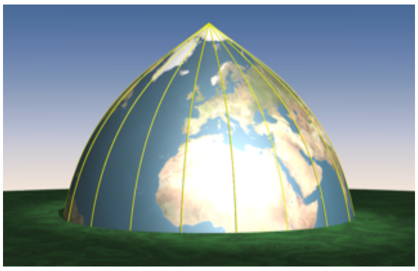
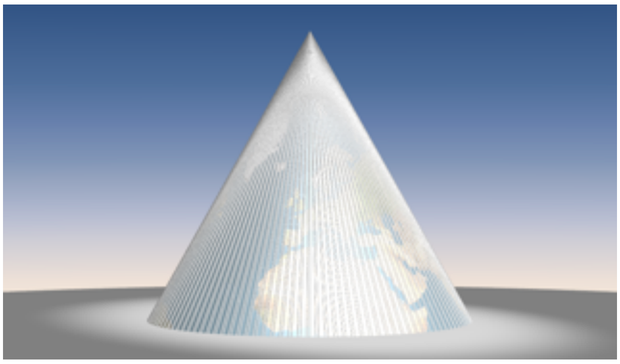
- Et après ! Il sera aussi bon ! Remarque qu’inversement ...

- Dîtes donc, les garçons, vous y allez un peu fort ! C’est la pâtisserie verte qui ressemble à un hémipshère, ou Céphaline qui ressemble à un hémisphère ?

- Allons Céphaline, ne sois pas aussi susceptible et pontilleuse ! intervint Sphalos. C’est vrai que tu es une analyste qui vérifie le moindre détail, la comparaison entre un cône et un hémisphère t’inspirerait-elle ?

- Peut-être ! Voyez-vous, il faut d’abord distinguer le cône plein du cône creux, comme celui du cornet dans lequel on met la glace, de même qu’on doit faire la distinction entre la boule qui est pleine comme celle en chocolat, et la sphère qui est creuse, comme la balle de ping-pong. L’hémisphère est une moitié de sphère, il est creux ; il faut donc le comparer au cône creux.

- En effet, merci Céphaline. Ce que je voulais dire tout à l’heure, quand tu m’as interrompu, est qu’on peut déformer insensiblement, il paraît qu’on dit continûment aujourd’hui, le cône creux en un hémisphère, et inversement, comme s’ils étaient en pâte à modeler, on peut déformer l’hémisphère en un cône creux. On pourrait aussi lui donner la forme d’une trompette en étirant la pâte à modeler vers le haut de manière à réduire progressivement le diamètre du cône.

Déformation de l'hémisphère en cône droit à base circulaire
Illustrations par Jos Leys

- Ne peut-on pas dire que cette trompette, ce cône et cet hémipshère sont en quelque sorte équivalents ?
- Tout à fait. Oui, il nous faudrait de la pâte à modeler et fabriquer toutes les formes que nous considérons comme équivalentes à celle du cône. Le haut de la flamme de notre bougie lui ressemble. D'ailleurs on pourrait donner un nom à cette famille de formes. Quand on parle de la famille princière, on en voit tout de suite les membres et on sait à qui on s'adresse.
- Merci, dit noblement le Prince des Kangourous. Je ne prendrai ta remarque ni au premier, ni au second degré. Pour en revenir à ta recherche patronymique, elle me paraît, comme d'habitude, pleine de bon sens, mais un peu prématurée. Je ne suis pas certain que notre connaissance des cônes et des hémisphères soit assez avancée pour nous lancer dans cette aventure.

Ces paroles prudentes et bien sérieuses rafraîchirent quelque peu l'atmosphère. Nos trois gourmands piquèrent le nez dans leur assiette, plus soucieux que jamais de finement apprécier l'art du pâtissier.

Un gros éclat de rire d'une table voisine les fit se retourner. Un petit enfant amusait la galerie : il avait placé un cône en chocolat sur son nez en disant qu'il était Pinocchio, ses copains s'essayaient à faire de même sans toujours beaucoup de succcès. C'était à qui ferait davantage le clown.

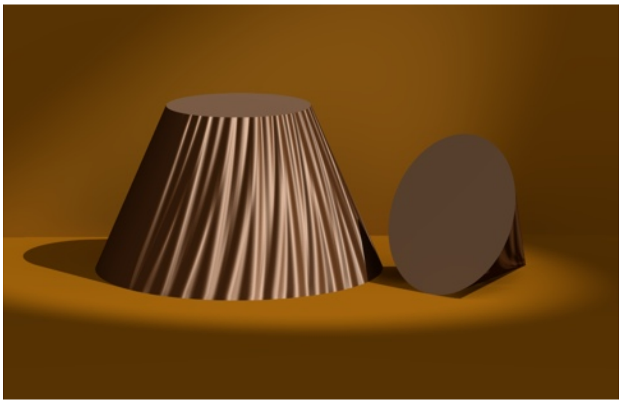
Chacun puisait dans son gâteau bien sûr à sa façon. Pour bien différencier et marquer leur personnalité, ils avaient convenu que chacun procéderait de manière différente des autres. Les cuillères bien plates qu'on leur avait données les incitaient à découper leurs cônes en tranches. Ils décidèrent de se partager le travail ainsi.

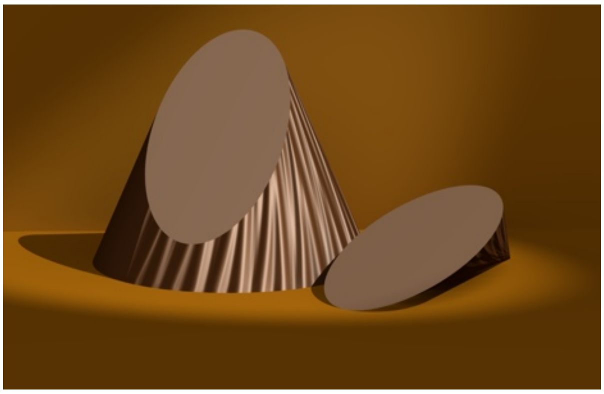
Céphaline, partie du sommet du cône, avait choisi de faire des tranches plus ou moins horizontales qui rencontraient l'axe du cône. Elles ne devaient jamais devenir parallèles à l'une quelconque des fibres.

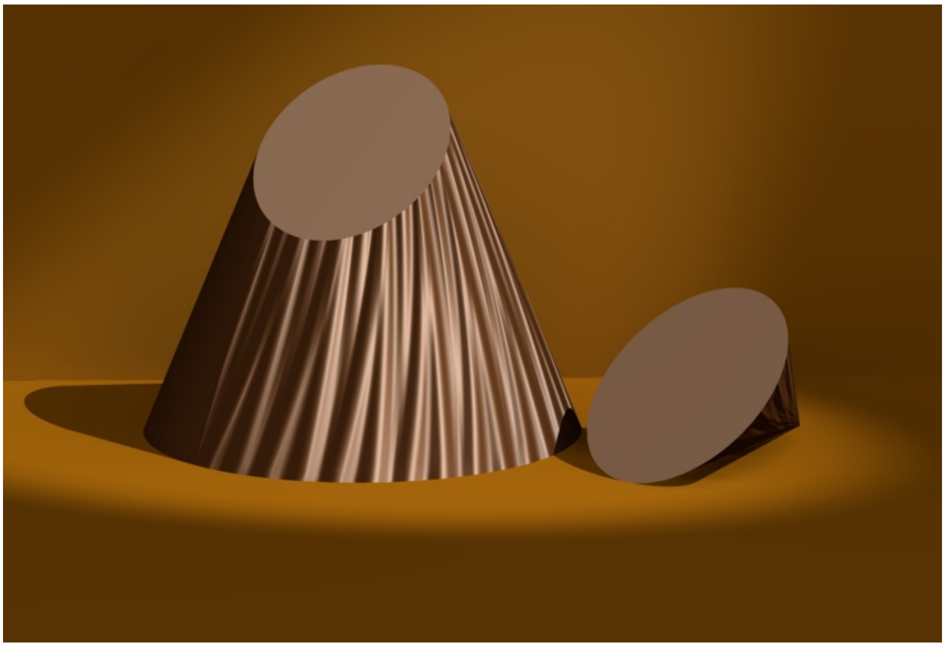
Kangourou s'efforçerait de couper son cône en tranches bien verticales, et bien parallèles entre elles.

Sphalos, lui, essayerait de couper sa friandise conique en tranches parallèles à l'une des fibres rectilignes, toujours la même, de la surface du cône.

- Oui Céphanline! Parfaite cette coupe, bien horizontale ! Le bord est un cercle très réussi !
- Pas mal non plus, toi, Kangourou, mais ta main tremble un peu vers le bas, ça fait des miettes. Regarde Sphalos comme il fait attention ! A cette vitesse-là, tu serais encore sur les pentes !
- Pas très réussie cette coupe, Céphaline, un côté est plus haut que l'autre !
- Vrai, mais c'est aussi bon, même si la forme du bord n'est plus un cercle. Je recommence, de sorte qu'un côté est encore bien plus haut que l'autre, et tu vois, j'ai toujours cette même forme de cercle déformé, et qui pourtant, apparemment, présente toujours deux directions de symétrie.
- Recommence, pour voir !
- Oh, c'est presque un cercle parfait !
- Encore ce cercle déformé avec ses axes de symétrie.







Gourmands, s’abstenir
Illustrations par Jos Leys

Les regards de nos trois héros étaient rivés sur les bords des sections que Céphaline faisait les unes après les autres, rencontrant toujours l’axe de son gâteau conique. Kangourou et Sphalos avalaient leur friandise sans maintenant faire trop attention à la manière dont ils prenaient leurs parts.

Un Père Noël gourmand, qui passait près d’eux, amusé par de les voir si absorbés, se penchant un instant vers eux, leur glissa succintement :

- Voyez-vous les enfants, les bords des tranches de votre amie sont des courbes qu’on appelle des ellipses. Bon appêtit !

Céphaline, Kangourou et Sphalos, surpris, levèrent les yeux. Le sourire en coin, ce Père Noël avait presque disparu.

Chapitre 4

SUR LE MONT APOLLONIUS

Remis de leur surprise, Céphaline, Kangourou et Sphalos terminèrent rapidement leur goûter, se promettant de revenir le plus tôt possible, dès le lendemain, en ce lieu aussi attirant, réconfortant qu'insolite. Ils programmèrent de se retrouver d'abord sur le Mont Apollonius, pour y expérimenter physiquement leur trouvaille : il y avait plein d'ellipses sur le cône.

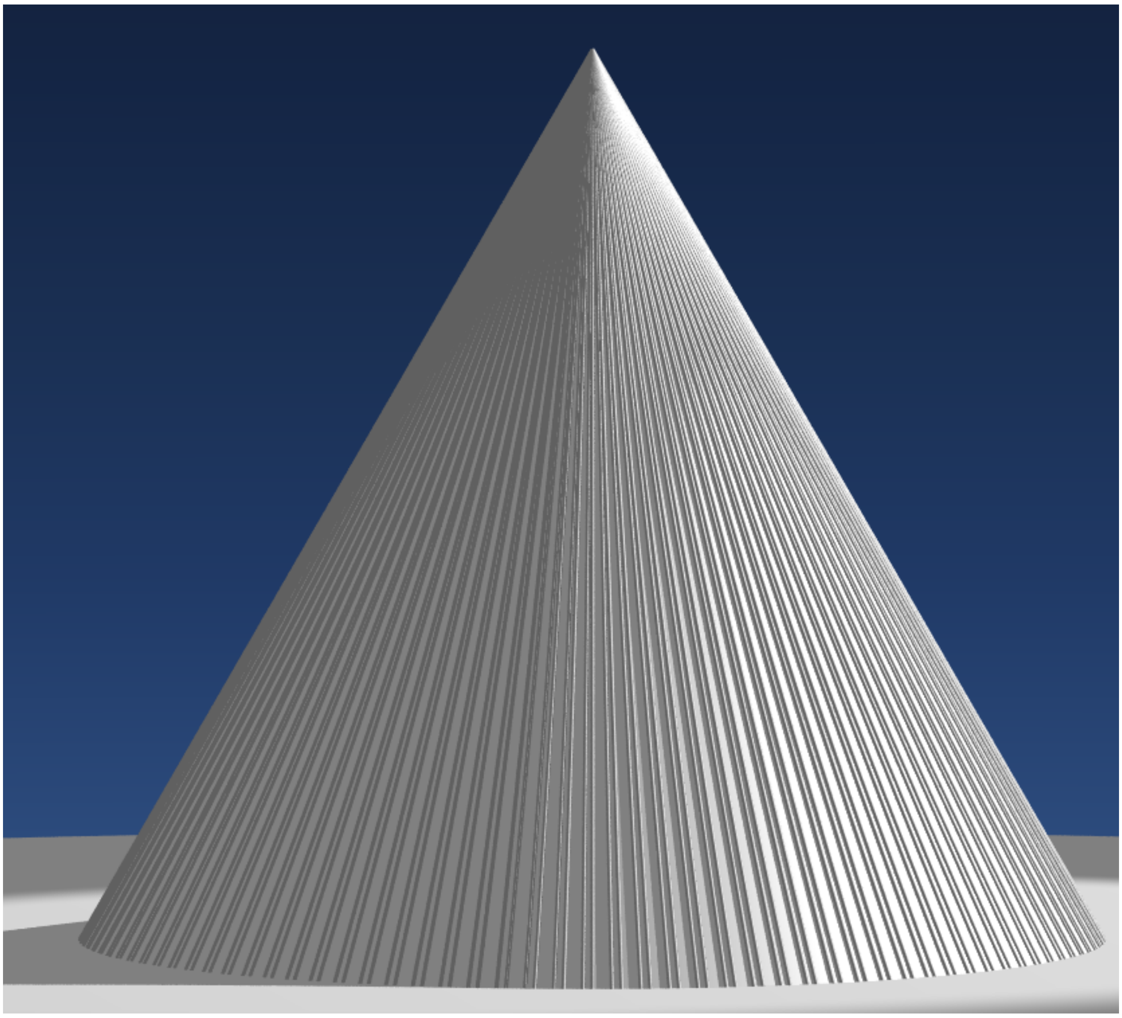
Selon la légende, un grand penseur des temps anciens avait planté son logis au sommet de ce Mont, et y avait écrit des traités fort savants dont on trouvait encore trace dans les bibliothèques d'aujourd'hui. Ce Mont avait aussi la forme d'un cône, et les traités en question évoquaient les propriétés extrarodinaires des cônes de leur époque, et des sections qu'on pouvait leur faire subir. Il y avait évidemment bien peu de chances pour que ces propriétés se soient modifées au cours des âges.

Ils étaient les premiers à être arrivés sur son sommet. Il avait neigé la nuit, une poudreuse très blanche, immaculée, légère, lissait toutes les aspérités. Elle semblait, au loin, se confondre avec le ciel.

Elle étouffait tout bruit. Ils étaient, eux aussi, comme immobilisés par ce silence infini. Il emplissait l'espace.

Soudain, comme des chiots sortant de l'eau, ils s'ébrouèrent. D'abord se mettre en jambes : ils décidèrent pour commencer de partir en trace directe, tout droit vers le bas. Malgré leur vitesse, ils glissaient silencieusement. L'air sec et froid se frottait contre les visages. Le plaisir était aérien.

Leurs traces rectilignes fibraient le cône enneigé. Il semblait maintenant recouvert par de longs rubans blancs finement attachés au seul sommet. Un artiste aurait-il pu faire mieux ?



Cette oeuvre de fibration achevée, ils entreprirent de dessiner des ellipses sur le cône. Bien sûr, son sommet pouvait être considéré comme une ellipse singulière : elle était en quelque sorte là par nature, ils n'avaient point à se fatiguer pour la créer ! Et après tout, un cercle était aussi une ellipse singulière, moins que la précédente certes, mais quand même bien singulière : n'avait-elle pas une infinité d'axes de symétrie ?

Ils ne tracèrent qu'un seul cercle, encore était-il de petite taille : pas facile de tourner autour du sommet en restant toujours à la même hauteur ! Ils ne pouvaient pas prendre de vitesse, certes, en se maintenant sur cette ligne que les géographes appellent une ligne de niveau. « Pas drôle, dirent-ils, un seul suffira ! »

Selon les expériences faites la veille, les ellipses tracées sur le cône avaient un point le plus élevé et un point le plus bas. La ligne joignant ces deux points semblait être un axe de symétrie de l'ellipse. Si cela était, la longueur du chemin joignant ces deux points devait être la même, que l'on quite le point le plus élevé par la droite ou par la gauche.

Si donc Céphaline et Sphalos, ils skiaient à vitesse égale, partaient en même temps d'un point le plus élevé, ils devaient se rencontrer au même moment au point le plus bas : à condition bien sûr qu'ils suivent des bonnes trajectoires, l'une étant la demi-ellipse gauche, l'autre la demi-ellipse droite, la symétrique de la précédente par rapport à l'axe de symétrie. Comment faire ?

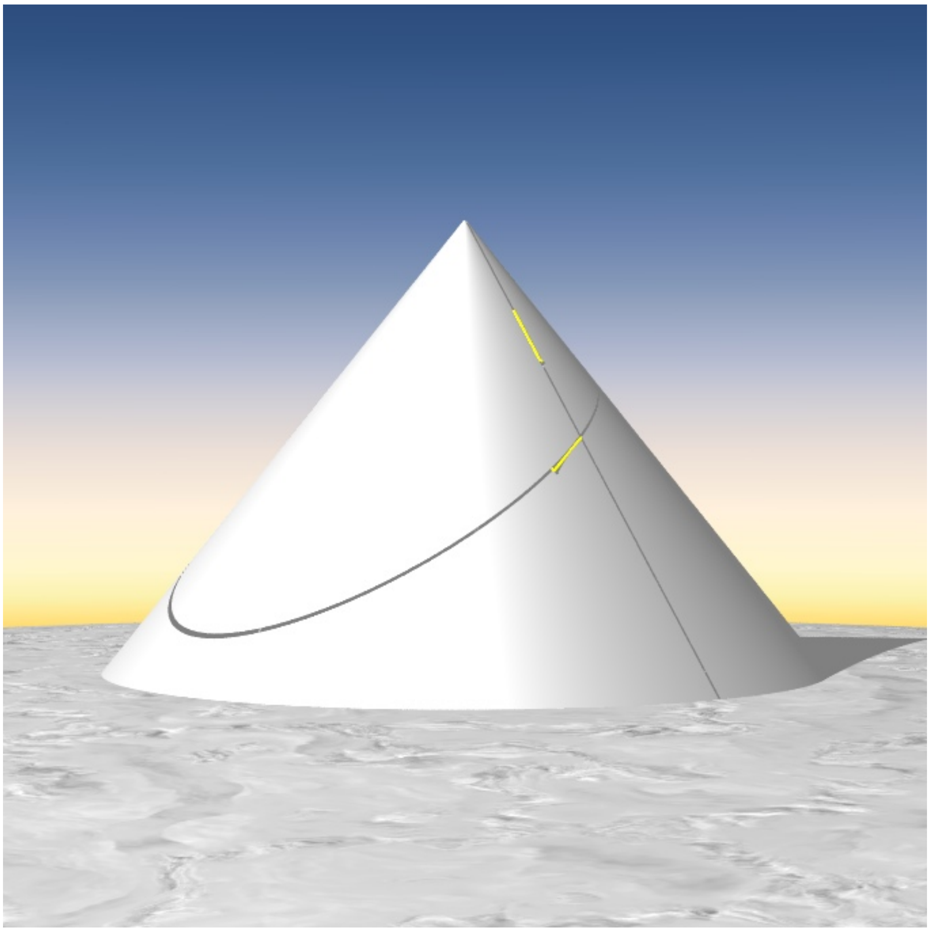
Kangourou leur proposa de rester au sommet du Mont Apollonius, et, de la voix, de les guider. Il ne cessait de s'adresser à l'un et à l'autre.

- Tourne un peu plus à droite, Sphalos.
- A gauche, à gauche, Céphaline.

En leur tout début, les trajectoires restèrent à peu près symétriques. Mais rapidement, au fur et à mesure que nos skieurs s'éloignaient de Kangourou et gagnaient de la vitesse, elles prirent un caractère de plus en plus personnel. Ce n'est qu'au pied des remonte-pentes que Céphaline et Sphalos, amusés par l'échec de leur expérience, se rejoignirent en un gros éclat de rire.

S'approchant de l'engin mécanique qui allait les monter là-haut, tout en haut jusqu'à Kangourou, ils aperçurent un bonhomme drôlement attifé qui s'affairait près d'un vieux tonneau mais d'une belle hauteur. Ils n'eurent pas le temps d'en voir davantage.

Assis sur le siège confortable du remonte-pente, ils devisèrent sur leur échec. «Nous devrions aller beaucoup moins vite, veiller à être constamment à la même hauteur, tourner en même temps et de la même façon», telle fut leur conclusion.



Chaque ski jaune illustre la direction de la vitesse selon la trajectoire du skieur

Illustration par Jos Leys

A propos de vitesse, Céphaline fit aussi cette remarque toute bête qu'elle était toujours dirigée dans le sens de leur mouvement, et donc dans le même sens que les fibres lorsqu'ils dévalaient tout droit les pentes, dans une direction presque perpendiculaire, transversale pourrait-on dire, lorsque par exemple ils avaient parcouru un cercle, ou essayaient de descendre selon une ellipse.

Une surprise les attendait à leur arrivée. De loin déjà, se détachait sur le bleu du ciel un cône de neige surmonté d'une boule aussi blanche. Kangourou les attendait fièrement devant son chef-d'oeuvre.

- Apollonius vous souhaite la bienvenue ! dit-il à ses compagnons.

Etaient tracées sur la boule des ellipses ou des arcs d'ellipses figurant des yeux rieurs, des lèvres souriantes. Bien sûr, le nez pointu était conique. Les strie fines qui couraient de haut en bas donnaient l'illusion parfaite des plis d'un élégant manteau. Un beau faisceau d'ellipses dessinées autour du cou de cet accueillant personnage assurait sa prestance.

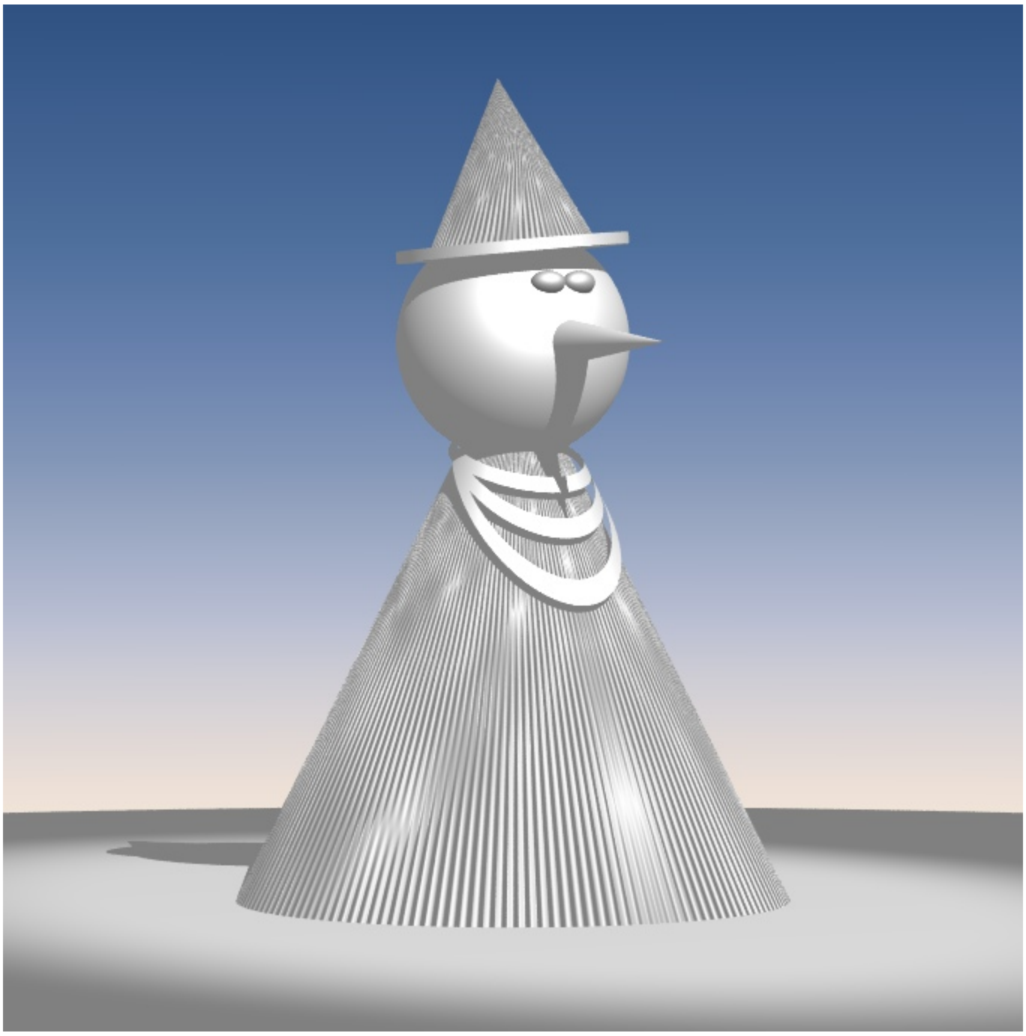


Illustration par Jos Leys

Sous le regard attentif de Kangourou, Céphaline et Sphalos s'essayèrent à nouveau à tracer une ellipse. S'ils parvinrent bien à se rejoindre, la courbe finale qu'ils avaient dessinée était loin de ressembler à l'ellipse, très évasée près de leur point de départ, trop peu près de leur lieu de rencontre.

En somme, il leur manquait la connaissance de la manière dont tournait l'ellipse en chacun de ses points, de sa courbure. Fort de cette prise de conscience, ils décidèrent d'abandonner ce jeu de tracer une ellipse autour du Mont Apollonius. Ils filèrent droit vers l'endroit où devait se tenir le tonneau.

Sur lequel juché, misérablement vêtu, notre homme s'agitait : «Buvez Biogène avec Diogène» criait-il. Il distribuait des boissons chaudes. Céphaline, Kangourou et Sphalos s'approchèrent. Tout en buvant l'étrange et chaleureux liquide, leur regard se posa sur le tonneau lavé par le temps. Les lattes verticales et bombées étaient en somme comme les fibres d'un espace, la surface du tonneau en l'occurrence. Trois cercles de fer, un peu rouillés, le ceinturaient. Un tout en haut, un tout en bas, et un plus large dans la partie la plus bombée, au milieu.

- Je choisis celui du bas, dit Kangourou.
- Celui du haut, dit Sphalos.
- Et moi qui suis entre vous, celui du milieu dit Céphaline.
- Ne pourrait-on pas dire que le tonneau est un espace fibré, n'importe quel cercle pouvant être choisi comme base sur laquelle reposent les fibres ? dit Kangourou.

Illustration du tonneau par Jos Leys

Jos nous montre le contenu de la barrique, un élixir remontant : l'élixir d'Anvers vert

Céphaline et Sphalos approuvèrent. Sphalos ajouta:

- Oui, mais ces cercles jouent sur le plan pratique un rôle important : ils assurent la stabilité de l'ensemble des fibres, leur cohésion, la connexion entre elles.

- Bonne remarque dit Céphaline. Et ce qui permet cette propriété est évidemment due au fait que ces cercles sont disposés à peu près perpendiculairement aux fibres, transversalement.

- En effet, dit Kangourou. J'ajouterai que la courbure de ces cercles contribue fortement à définir la forme du tonneau.

A peine avait-il fini sa phrase qu'il se retrouva par terre, enfin le nez dans la neige ! Lui, le Kangourou merveilleux ? Eh, oui, un tout fou débutant, manquant son dérapage, était venu s'encastrer dans lui. En tombant, Kangouru avait heurté Sphalos qui avait heurté Céphaline : un vrai château de cartes. Skis, bras et jambes étaient emmêlés. Quel sac de noeuds ! Il n'y avait eu, heureusement, plus de peur que de mal.

Ils décidèrent néanmois de rentrer. Prochain rendez-vous : la Pâtisserie que vous connaissez, on y trouve les remèdes pour fortifier le moral.

Chapitre 5

DES DÉFORMATIONS EN TOUT GENRE

Comme toutes les fins d'après-midi en cette saison, la Pâtisserie du Mont Sirius, maintenant célèbre, faisait le plein. Toutes les formes d'accoutrement s'y rencontraient, et de visages aussi. Stimulante cette diversité. Elle invita nos amis à jouer, un jeu nouveau, du moins le croyaient-ils, le jeu du nez.

Déjà, la veille, l'idée était venue, pendant qu'à Pinocchio les voisins de table jouaient. A quoi ressemble à un cône, si ce n'est à un nez, comme celui tout blanc fiché par Kangourou sur son Apollonius.

Il faisait froid dehors, bien chaud dedans. Et les nez qui passaient, qui parlaient, qui chantaient, qui dansaient, qui sautaient, qui riaient, faisaient à tout moment penser à ces cônes en chocolat qui s'affaissaient, s'aplatissaient, se tordaient, s'élargissaient, se penchaient, se courbaient, s'écartaient, s'allongeaient, se raccourcissaient, vers la droite, vers la gauche, vers le haut, vers le bas.

Nos trois larrons avaient apporté un dictionnaire, et comparaient ce qu'ils voyaient, sur les visages ou dans leur assiette, à ce qu'ils lisaient : « nez long, nez droit, nez grec, aquilin, bourbonien, busqué, crochu, écrasé, épaté, pointu, retroussé, en bec d'aigle, en lame de couteau, en pied de marmite, en patate ! », et pourquoi pas en aubergine, en carotte ou en courgette ? Quelle ratatouille ne pouvons-nous pas faire avec des nez !

Céphaline, dont la mémoire était grande, se souvint à ce propos du peintre fameux, Arcimboldo. Ses tableaux hauts en couleurs assemblaient tous les fruits de la terre en personnages pleins d'humour et moqueurs.

Il n'était pas jusqu'au psychologue et jusqu'à l'acteur qui ne fit l'éloge du nez. Ils entendirent Edmond Rostand déclamer :

Ah ! non ! c'est un peu court, jeune homme !

On pouvait dire... Oh ! Dieu ! ... bien des choses en somme...

En variant le ton, - par exemple, tenez :
Agressif : "Moi, monsieur, si j'avais un tel nez,
Il faudrait sur-le-champ que je me l'amputasse ! "
Amical : "Mais il doit tremper dans votre tasse
Pour boire, faites-vous fabriquer un hanap ! "
Descriptif : "C'est un roc ! ... c'est un pic ! ... c'est un cap !
Que dis-je, c'est un cap ? ... C'est une péninsule ! "
Curieux : "De quoi sert cette oblongue capsule ?
D'écritoire, monsieur, ou de boîte à ciseaux ? "
Gracieux : "Aimez-vous à ce point les oiseaux
Que paternellement vous vous préoccupâtes
De tendre ce perchoir à leurs petites pattes ? "
Truculent : "Ça, monsieur, lorsque vous pétunez,
La vapeur du tabac vous sort-elle du nez
Sans qu'un voisin ne crie au feu de cheminée ? "
Prévenant : "Gardez-vous, votre tête entraînée
Par ce poids, de tomber en avant sur le sol ! "
Tendre : "Faites-lui faire un petit parasol
De peur que sa couleur au soleil ne se fane ! "
Pédant : "L'animal seul, monsieur, qu'Aristophane
Appelle Hippocampéléphantocamélos
Dut avoir sous le front tant de chair sur tant d'os ! "
Cavalier : "Quoi, l'ami, ce croc est à la mode ?
Pour pendre son chapeau, c'est vraiment très commode ! "
Emphatique : "Aucun vent ne peut, nez magistral,
T'enrhumer tout entier, excepté le mistral ! "
Dramatique : "C'est la Mer Rouge quand il saigne ! "
Admiratif : "Pour un parfumeur, quelle enseigne ! "
Lyrique : "Est-ce une conque, êtes-vous un triton ? "
Naïf : "Ce monument, quand le visite-t-on ? "
Respectueux : "Souffrez, monsieur, qu'on vous salue,
C'est là ce qui s'appelle avoir pignon sur rue ! "
Campagnard : "Hé, ardé ! C'est-y un nez ? Nanain !
C'est queuqu'navet géant ou ben queuqu'melon nain ! "
Militaire : "Pointez contre cavalerie ! "
Pratique : "Voulez-vous le mettre en loterie ?
Assurément, monsieur, ce sera le gros lot ! "
Enfin parodiant Pyrame en un sanglot
"

Le voilà donc ce nez qui des traits de son maître
A détruit l'harmonie ! Il en rougit, le traître ! "

Si Sphalos riait de bon coeur avec Kangourou et Céphaline, s'il s'étonnait de l'importance des nez, il se sentait néanmoins quelque peu gêné : n'avait-il pas lui-même un nez en forme de nez de camard ?

On était parti d'un cône au sommet bien pointu :

- Peut-on vraiment comparer sa forme à celle d'un nez aplati, camus ? demanda-t-il
- Oui, dit Kangourou.
- Non, dit Céphaline.
- Non, dit Kangourou.
- Oui, dit Céphaline.

Ils éclatèrent de rire tous les trois.

Ils sentaient qu'ils avaient fait des suggestions imprécises. Elles noyaient leur esprit dans une certaine confusion et dans une confusion certaine. L'envie les tenaillait de s'extraire de ce bain opaque.

- Bon, si on faisait le point dit Kangourou. On a dit qu'un espace est fibré parce qu'il possède une base et qu'en tout point de cette base passe une fibre.

- Dans tout ce qu'on a vu jusqu'à présent, toutes les fibres sont de même facture, elles sont toutes comme les sphaghetis d'un même paquet, remarqua Céphaline.

- Très juste, dit Sphalos, et tenons-nous en à ce type de situation, sinon nous allons nous perdre davantage dans le magma des possibilités.

- Remarquez l'importance de la forme de la base : elle me semble jouer un rôle essentiel dans la forme de l'espace, dit Kangourou. Qu'en pensez-vous ?

- Je crois que tu as raison, répondit Sphalos. Je propose qu'on nomme le nom de la base quand on parle d'un fibré. Par exemple, on dira un fibré à base circulaire, à base elliptique, ou carrée ou autre chose.

- Adopté ? dit Kangourou.

D'un seul élan, toutes les mains se levèrent.

- Bien, revenons sur les fibres. On en a vu de toutes sortes. Par exemple sur le tonneau ou sur l'hémisphère, elles étaient courbées. Sur les Monts Apollonius et Sirius, elles étaient rectilignes, comme d'ailleurs autour de l'escalier merveilleux qui me permet d'aller dans les étoiles. Je propose qu'on précise aussi les qualités des fibres, ou de la fibre standard, puisque nous avons convenu qu'elles devaient toutes venir de la même fabrique sur un espace fibré donné.

- D'accord, dit Sphalos. Choisissons d'abord les plus simples, les rectilignes, comme celles qu'on a tracées en faisant du ski, ou comme celles qu'avec un poinçon on peut inscrire sur un tube de plombier bien droit.

- Oui, dit Céphaline. Mais dans le cas du tube, du cylindre à base circulaire, toutes les fibres sont parallèles, toutes les sections parallèles au cercle de base sont des cercles qui lui sont identiques. Le cas de nos cônes à base circulaire est différent : les sections parallèles au cercle de base sont toutes de taille différentes, toutes les fibres rectilignes se rejoignent un point, un cercle singulier puisque son rayon est nul.

- Ecoutez, on appellera désormais cône tout espace fibré dont les fibres sont rectilignes et qui possède une section singulière.

Sphalos leva le doigt, le sourire en coin.

- Et s'il y avait non point un, mais deux points singuliers, si en somme le point singulier, le sommet d'un cône éclatait en deux points singuliers, en deux sommets ? dit-il.

- Alors ce serait un bicône, dit Kangourou.

- Un bicône ou un bicorne ? demanda en riant Sphalos.

- Question bien difficile, dit Céphaline. Il faudra demander la réponse à un polytechnicien ! Et pourquoi pas un tricorne : plus il y en a, plus on rigole.

- Bon, eh bien en attendant de transformer mon cône en chocolat en polycône, je vais le manger.

- Et si nous allions demain sur le Mont Circus ? hasarda Kangourou.

Céphaline ouvrit grand les yeux.

- Le Mont Circus ?

Chapitre 6

SUR LE MONT CIRCUS

Du côté de la Dordogne en France, dans le pays du sieur de Siorac et de son ami Sauveterre, tout comme aussi du côté du pays basque, se trouvent sous terre d'immenses grottes et cavernes. D'un blanc pur ou plus souvent teintées d'ocre pâle, stalagtites et stalagmites illuminées donnent à ces espaces voûtés un aspect féérique. Parfois les traverse une rivière silencieuse, venant alimenter un lac immobile. En ces lieux autrefois inviolés, le temps semble s'être arrêté.

Stalactites de glace chez nos amis russes
Oeuvre n° 98 d'Anatoly Fomenko

Le mont Circus est comme un grand couvercle assez rond, posé sur le toit d'une immense caverne. Un téléphérique vous monte jusqu'à celle-ci. Son intérieur a été aménagé. On y sert des repas chauds. Dans un coin de la salle, sur une estrade surélevée, acrobates et jongleurs divertissent le public. En colimaçon, grimpe un escalier gravé dans la pierre. Il débouche au milieu du grand rocher presque plat. On y retrouve l'air libre et léger des hautes montagnes.

La vue est d'autant plus impressionnante, parfois terrifiante, que tout regard situé près du bord du rocher plonge dans l'abîme. Qui ferait un pas de trop tomberait comme une pierre sans défense, bien loin vers le bas, s'écrasant sur les rudes et sombres aspérités du sol, sans que nul ne l'entende. Des flancs de ces parois, jaillissent ici ou là d'étranges et repousssantes gargouilles glacées.

A égale distance du milieu du rocher, en ces seuls endroits où le roc est légèrement bombé, deux solides pics de montagnard ont été plantés. Des noms leur ont été donnés. L'un, doré, est appelé le pic Képler. Le second, recouvert de nickel, est dénommé Newton.

Kangourou, Sphalos et Céphaline pensèrent alors au bicône qu'ils avaient évoqué la veille, un bicône à vrai dire ici très aplati, la toile de tente fort peu pentue d'un cirque à deux chapiteaux. Les deux pics en matérialisaient les deux singularités. D'ailleurs, pour protéger des intempéries les arrivants sur ce bicône, une guérite avait été érigée à la sortie de l'escalier, guérite que surmontait un bicorne !

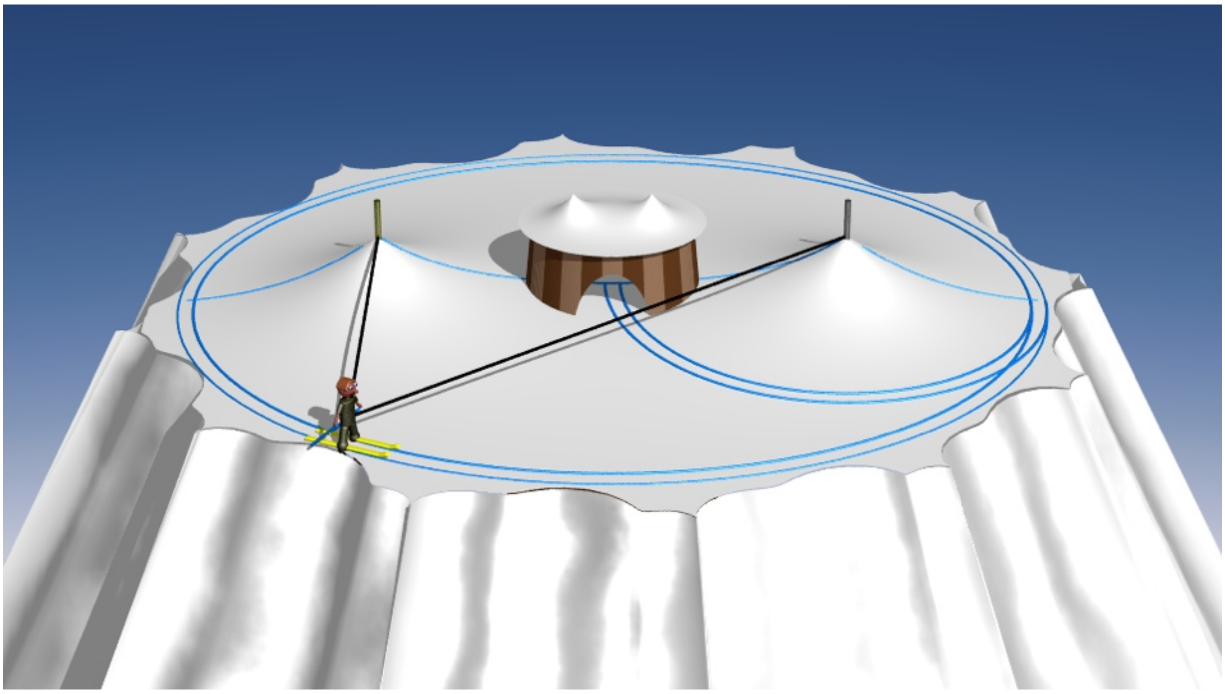


Illustration par Jos Leys

Des cordes, de grandes et diverses longueurs, joignaient le pied de l'un des pics à celui de l'autre. Tout visiteur devait s'y attacher. Ces cordes empêchaient de quitter le rocher quiconque s'approchant des abîmes effrayantes. Par précaution supplémentaire, l'accès au rocher était interdit les journées de vent violent et mugissant. Lorsqu'elles se libéraient de leurs chaînes, la force des bourrasques était imprévisible.

Kangourou arriva le premier, suivi de Sphalos, puis de Céphaline éblouie. Ce jour-là, l'air était immobile. Soleil rayonnait. Sur la neige éclatante, ses rayons dessinaient l'ombre parfaite des grands pics élancés.

- Salut, chaleureux Soleil ! dit Kangourou. Merci de ta présence, de nous donner un peu de ton énergie, aujourd'hui qu'il fait si froid, surtout ici !

- La nuit, toutes les nuits, vous me tournez le dos, et l'hiver, en trop vous penchant, je ne puis vous chauffer comme il faut. Cela dit, je vois que, quand même, vous avez assez d'énergie pour marcher sur ce roc glacé. Et bien sûr, plus votre énergie est grande, plus loin vous pouvez aller.

- Veux-tu dire, Soleil, que la distance, la longueur du chemin que nous parcourons, et après tout que toute longueur, est une sorte de mesure de l'énergie ?

- Exactement, Kangourou. Tu as compris le fond de ma pensée. Allez, je vous laisse vous promener, et si vous avez quelque question à me poser, n'hésitez pas à m'appeler !

Chacun choisit une corde, s'y attacha solidement. La promenade sur le roc pouvait commencer.

Ils s'approcheraient bien sûr, autant qu'ils le pourraient, du bord de leur plateau enneigé. Entre eux et les deux pics, les cordes seraient tendues au maximum, formant des portions bien rectilignes.

Ainsi la distance de chacun d'eux au pic Képler, augmentée de leur distance au pic Newton, resterait-elle constante, égale à la longueur de la corde qu'ils avaient choisie.

Sphalos avait la plus grande. Kangourou, qui, avec son snowboard, ne pouvait faire que des sauts, avait pris, par prudence, la plus petite. Et Céphaline me direz-vous ? Le spectacle l'impressionnait. Entre Sphalos et Kangourou, elle partit quand même, un peu rassurée.

Ils s'élancèrent tous du même côté de la ligne droite qui passait par les deux pics et le milieu de leur plateau rocheux. Ils s'avançaient, prenant soin de maintenir bien rectilignes les portions de corde qui les reliaient aux pics. Lorsqu'ils durent s'arrêter, tous les éléments des cordes étaient alignés avec la droite passant par les deux pics.

Ils firent demi-tour, jusqu'à devoir s'arrêter à nouveau dans une situation analogue, mais symétrique de la précédente par rapport au milieu du rocher. Ils recommencèrent plusieurs fois ce jeu, changeant parfois le côté de leur parcours par rapport à la ligne qui joignait les pieds des deux pics.

Ils n'y firent pas attention au début, explorant, attentifs et inquiets, tremblant parfois de peur plus que de froid, les vertigineux abîmes que fouillait leur regard. Mais à force de revenir sur leurs traces antérieures, ils s'aperçurent, surpris, que leur dessin ressemblait beaucoup à celui de leurs ellipses devenues familières. Etaient tout du moins ainsi les tracés de Sphalos et de Céphaline, puisque Kangourou ne pouvait que sauter d'un point à un autre.

Kangourou se résolut à appeler son ami Soleil.

- Soleil, toi qui sais tant de choses, ces courbes que nous avons tracées sur la neige ressemblent à nos ellipses. Est-ce que nous nous trompons ?

- Pas du tout, répondit Soleil. Et il y a plus étrange encore.

Chapitre 7

SOUS LE MONT CIRCUS

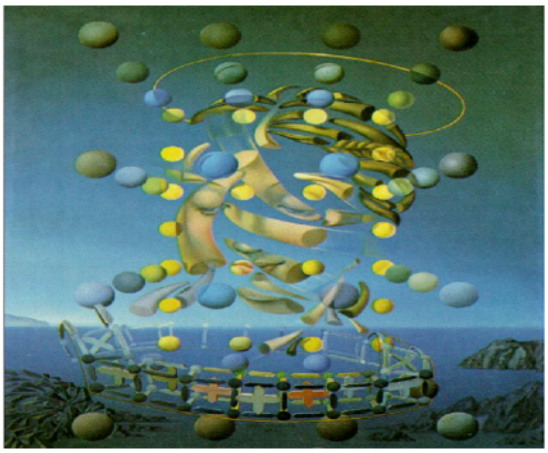
Il étaient au chaud, dans la grande caverne sous le Mont Circus. C'était un lieu gastronomique renommé. La seule viande servie était du vieux bison, les seules boissons apportées, de la cervoise à l'ancienne, et du jus de pomme nouveau. On buvait dans des chopes particulières à cet établissement, des cornes de bison savamment évidées, devenues presque translucides. Seuls les connaisseurs appréciaient les qualités de ce fromage rare, le «rocfort du Mont Circus».

Intimidés, nos trois amis s'attablèrent. Ils commandèrent la célèbre spécialité du cru : le zappi elliptique. On leur apporta d'abord une grande flasque de cervoise et, pour boire, trois cornes de bison. D'ailleurs on voyait des cornes partout, sur toutes les tables, sur tous les murs.

Le visage de Céphaline s'éclaira à leur vue. Nul n'ignore qu'elle avait quelque connaissance en peinture.

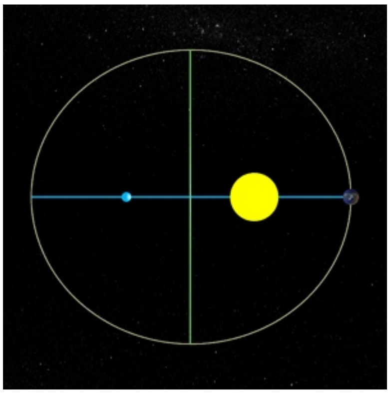
- Vous savez, dit-elle à ses compagnons, à quoi me fait penser cette profusion de cornes ? A celles de rhinocéros qui ont obsédé Dali. Il a fait plusieurs tableaux, inspirés je ne sais trop pourquoi par la Madone de Raphael, où apparaissent une multitude de cornes de rhinocéros, plus ou moins déformées. Emportées par un vent tourbillonnaire qui enveloppe la tête devenue parfois invisible de la Madone, elles tournent autour de cette tête à toute vitesse, «à la vitesse maximum» dit Dali. Ces tableaux font quand même moins peur que les à pics qui nous entourent. Tenez, je vais vous montrer l'un de ces tableaux, par exemple celui-ci.

Cépahaline ouvrit son portable, alla sur internet, sur le site de l'ESMA, et leur montra cette image :



- Très chouette, dit Sphalos. Ces cornes me font plutôt penser à des cônes bien droits à base circulaire, mais déformés. C'est cette déformation et ce mouvement qui leur donnent vie. Le cône droit est comme figé, rigide, je n'ose pas dire mort, mais je reconnais qu'il est si simple, si riche en symétries apparentes, qu'il est plus facile à comprendre de manière immédiate que la corne de rhinocéros.

- C'est vrai, dit Kangourou, ce cône droit est le modèle des cônes, celui qui inspire et que tente d'imiter tous les autres cônes. Je suis d'ailleurs frappé par l'importance des cônes : les montagnes, les nez et les cornes, tous des cônes ! Et peut-être en ai-je oublié ? Et puis, il y a aussi ces sections de cônes, ces ellipses étonnantes puisque Soleil nous a dit que la Terre tournait autour de lui, et que le chemin qu'elle suivait avait exactement la forme d'une ellipse ! Remarquable encore la position de Soleil par rapport à cette ellipse terrestre !



La trajectoire elliptique de la terre est, dans la réalité, presque un cercle

Illustration par Jos Leys

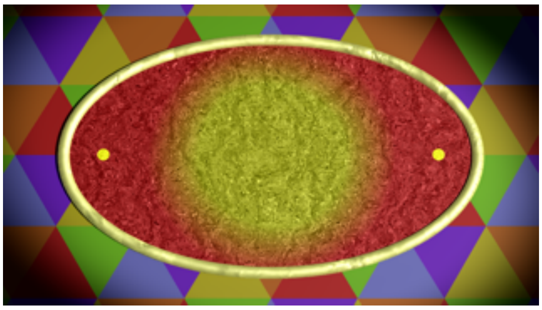
- Il faudra qu'on aille voir un jour Képler et Newton, ajouta Céphaline, puisque Soleil affirme que ces messieurs sauraient nous expliquer pour quelles raisons la Terre tourne ainsi. En tout cas, on comprend bien pourquoi les emplacements des deux pics qui portent leur nom s'appellent des foyers, puisque Soleil s'y trouve situé pour l'ellipse terrestre, lui qui nous chauffe, et qui fait d'abord chauffer sa cocotte !

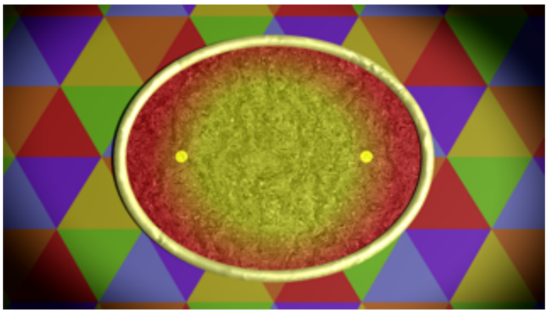
Céphaline, mezzo voce, ajouta :

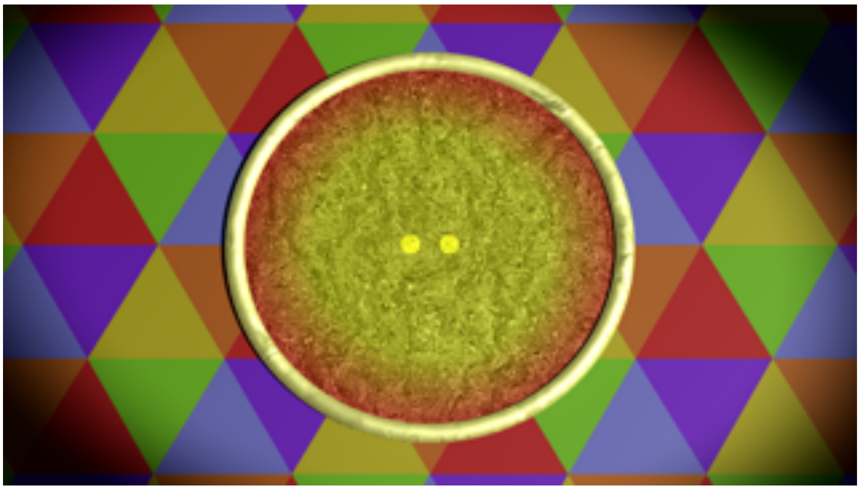
- Je me demande si, à la manière de la Nature, les Romains avaient placé quelque statue rayonnante aux foyers de leurs grandes arènes, le Colisée ? Je rêve d'aller à Rome pour m'en assurer !

La conversation s'arrêta soudain : on leur apportait les zappi elliptiques. Grandes, elles emplissaient l'assiette. La respiration se fit plus forte, les nez s'abaissèrent et se levèrent. Les zappi sentaient délicieusement bon.

Elles n'avaient pas cependant, toutes, exactement la même forme. Deux d'entre elles étaient franchement elliptiques, la troisième était presque circulaire. Les petites piques dorées et blanches, fichées dans cette dernière à l'emplacement de ce que devaient être les foyers, étaient toutes proches l'une de l'autre. Le regard de Sphalos se porta sur la position des piques dans les trois zappi.



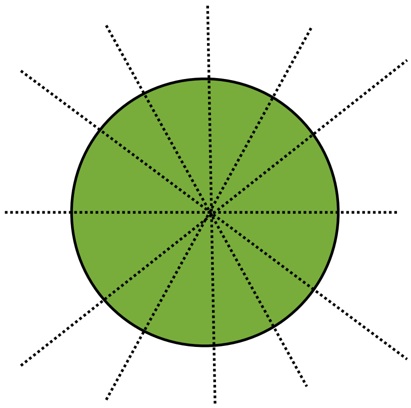




Illustrations par Jos Leys

Et avant que quiconque ne commence à détruire l'ordonnancement de son assiette, Sphalos, qui, la veille, à la Pâtisserie, avait lancé l'idée du bicône, prit la parole.

- Céphaline, Kangourou, regardez. Le disque solaire, la pièce de monnaie, le disque plat dont le bord est un cercle parfait, ne montrent-ils pas la plus simple et la plus extraordinaire des formes visibles, parce que, par son centre de symétrie, le point le plus au milieu du disque, passe une infinité de droites, de lignes rectilignes qui sont, chacune, un axe de symétrie de cette figure. Cette infinité de symétries internes ne révèle-t-elle pas la stabilité parfaite du disque ? Pour obtenir quelque chose de stable, ne doit-on pas le rendre symétrique ?



Et le centre ici de cette belle symétrie, c'est le point singulier du disque. Si je l'élève au-dessus du disque plat, si en somme j'étire vers le haut le disque constitué d'une pâte malléable comme une pâte à modeler ou comme la pâte de ces zappi, de sorte que le point singulier initial qui monte reste un point singulier, alors j'obtiens un cône.

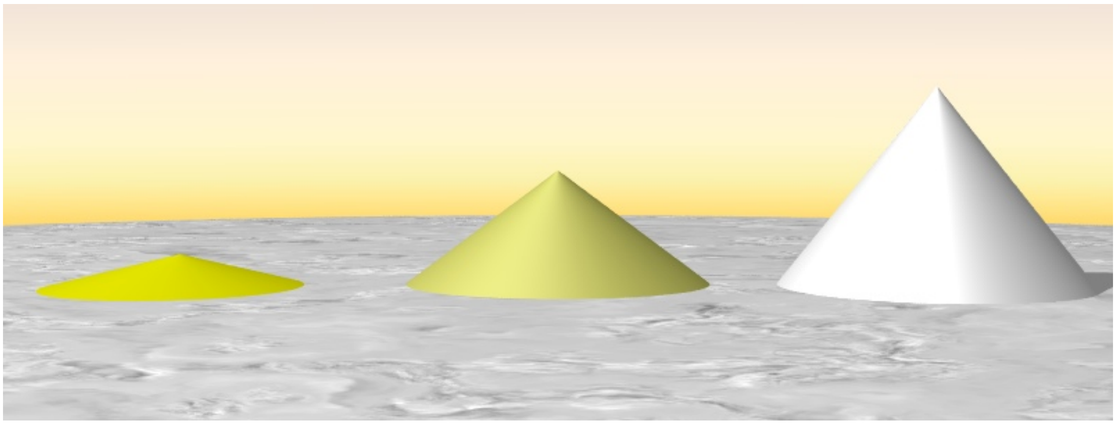


Illustration par Jos Leys

Une gerbe sonore d'objets métalliques tombant au sol, des applaudissements et un brouhaha mirent une brusque fin au discours savant de Sphalos. Un des jongleurs avait fini par perdre le contrôle de ses gestes, mais il avait tenu son jeu si longtemps qu'il avait suscité l'admiration des spectateurs. Ils se détendaient maintenant de manière un peu chaotique après avoir été si immobiles, le regard attentif à la moindre erreur, à la moindre défaillance.

La discussion reprit, la bouche parfois un peu pleine.

- Alors, dit Céphaline, où veux-tu en venir ?
- A ceci. Le point singulier du disque concentre en quelque sorte en lui-même toutes les possibilités de devenir de ce disque. Par son évolution interne, ou par l'effet de facteurs externes, il peut advenir que ces potentialités se révèlent. Comme le fruit qui libère ses graines, qui à leur tour vont donner naissance à de nouveaux êtres, le point singulier peut éclater en d'autres points singuliers.
- Notre poète, murmura Kangourou.

- Le centre du disque, où se trouvent confondus les deux pics, va donc commencer par éclater en deux points singuliers seulement, les foyers, représentés chacun, comme on l'a fait sur le plateau au-dessus de nos têtes, par un pic.

Sphalos sortit un crayon de ses poches, et sur la serviette en papier qu'on leur avait donnée, commença à dessiner un cercle avec son centre, et une suite d'ellipses où l'on voyait les foyers de plus en plus éloignés l'un de l'autre.

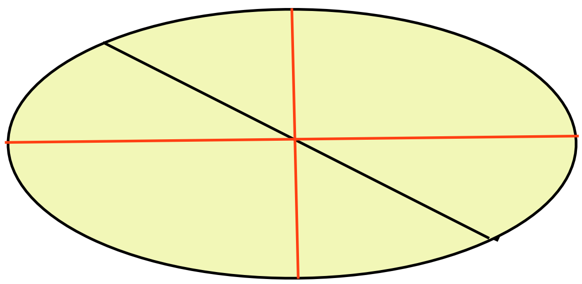
- Bien vu, dit Céphaline. Mais il me semble que l'éclatement doit se faire de sorte que la stabilité soit la mieux assurée, c'est-à-dire en conservant le plus grand nombre de symétries possibles.

Comme le centre du disque originel peut conserver encore des ressources d'éclatement, il va rester présent en tant que centre de symétrie pour l'ellipse.

Conserver au mieux la symétrie impose aussi que les nouveaux points singuliers restent à égale distance du centre, et sur une même ligne passant par le centre du disque originel. Cette ligne importante définit ainsi le plus grand axe de symétrie de toute l'ellipse.

Le crayon de Sphalos en main, elle soulignait sur le dessin les éléments importants de son discours.

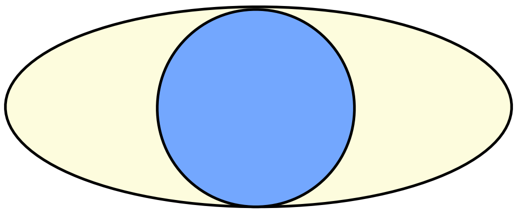
Que peut-on dire encore ?



Toute ligne qui passait par le centre du disque le coupait en deux points symétriques. La généralité de cette propriété pour le disque souligne son importance. Elle sera donc conservée, au moins partiellement, au cours du processus d'éclatement : toute droite qui passe par le centre de l'ellipse la coupera en deux points symétriques par rapport au centre. Et la ligne perpendiculaire au grand axe, passant par le centre de l'ellipse, deviendra le petit axe de symétrie que nous avions observé à la Pâtisserie du Mont Sirius.

- Ouf ! Tout ça, dit Kangourou. Mais on peut encore ajouter autre chose. Le cercle est le lieu des points dont la distance au centre singulier reste constante, point singulier qui est en fait un point multiple, un point double. Il faut donc compter deux fois la distance d'un point du cercle à son centre où les foyers sont confondus. Quand l'éclatement du centre singulier fait apparaître ces deux points singuliers distincts qu'il détenait cachés, les foyers, la propriété fondamentale de conservation des distances doit être maintenue : la somme des distances d'un point de l'ellipse aux deux foyers va rester constante !

- Bravo ! dit Sphalos. Encore une chose. Le cercle lui-même, qui est le bord du disque, comment se modifie-t-il par nos déformations insensibles qui produisent et accompagnent l'éclatement ? Tenez, dit-il, en pointant du doigt le dessin. Regardez, les points de l'ellipse les plus rapprochés du centre sont situés à égale distance des foyers, ils sont sur le petit axe de l'ellipse. Et le cercle dont le centre est celui de l'ellipse et qui passe par ces deux points, ne touche l'ellipse qu'en ces points. Il fait un peu penser à la pupille d'un oeil qui serait elliptique.



Ils se regardèrent tous les trois, les yeux dans les yeux. Le sourire s'afficha sur leurs lèvres, une douce chaleur empourpra leurs visages. Non, la forme de l'oeil n'était pas celle d'une ellipse, d'une beauté un peu rudimentaire. L'élégance de l'oeil, sa lumière leur paraissaient insurpassables.

Ils avaient un peu mangé tout en parlant, mais surtout beaucoup parlé. Il était temps de boire. La cervoise plut à Kangourou et à Sphalos. Céphaline la goûta, fit la moue, et commanda du jus de pomme. Sur la bouteille, une étiquette : «À la Pomme de Newton».

- N'y a-t-il pas de bouteille «À la cervoise de Képler», demanda-t-elle ingénument ?

Chapitre 8

LA PARABOLE DE LA BOULE DE NEIGE

IIs faisaient l'admiration de tous. Sphalos sur la gauche et Céphaline sur la droite, filaient à toute vitesse, souples et ondoyants, en se moquant des bosses. Sur le dos de chacune, Kangourou entre eux deux les précédait d'un bond, laissant à chaque saut une trace légère.

Vues d'en haut, de part et d'autre d'une ligne toute droite de légers pointillés, ondulaient, symétriques, les traces des glisseurs. Elles se croisaient parfois, dessinant sur la neige, d'agréables arabesques, et même quelquefois les enlacements d'une tresse.

On ne se lassait pas d'admirer ce ballet.

Il y eut quand même une fin, quand les protagonistes songèrent à d'autres jeux. Glisser était très bien, mais sauter encore mieux. Tel était bien sûr l'avis de Kangourou.

On devait s'entraîner. L'on fit un petit mur qu'il fallait dépasser. Quoi de plus naturel, Kangourou hors concours. L'appréhension était forte : glisser oui, sauter non, Sphalos et Céphaline partageaient cet avis. Rassemblant les courages, on se décida enfin. Le mur était solide, pour ne pas s'affaisser.

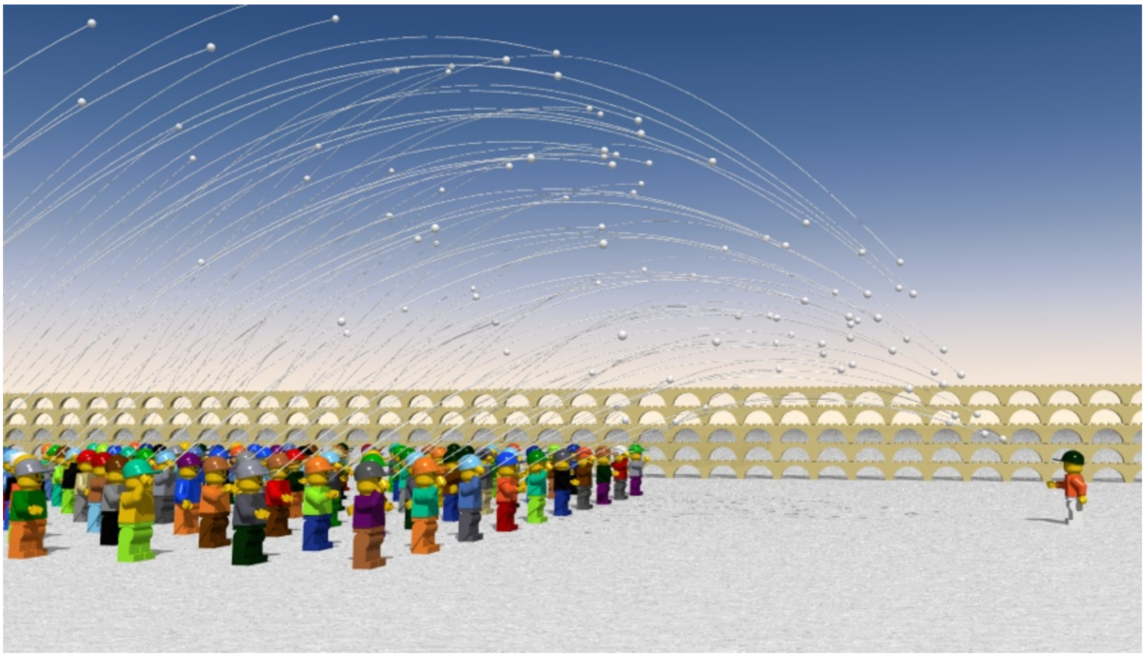
Sphalos montra l'exemple. Dans les chaumières encore, on raconte son exploit. Près du feu les conteurs s'en donnent à coeur joie. Et voici leur histoire.

Glissant à tout allure vers l'obstacle sournois, s'élevant dans les airs les skis bien repliés, déguisé en glaçon un troll le heurta. Il frappa le ski droit qui tourna. Ski droit par dessous et ski gauche par dessus, croisés plus solidement que les doigts, se fichèrent dans la neige, et firent faire à Sphalos une pirouette dans les airs. Il plongea tête première, bec ouvert dans la neige profonde. On ne voyait plus que les pattes agitées.

Céphaline fut la plus prompte à lui venir en aide. En fait, dans son trou, Sphalos riait. Ces chutes spectaculaires qu'on appelle des soleils, où skis d'un côté et bonhomme de l'autre s'enroulent et tourneboulent, laissent le plus souvent de joyeux souvenirs. Sphalos fut bientôt rechaussé, et remercia Céphaline d'un retentissant baiser. La journée pouvait continuer.

Kangourou tenait absolument à sauter. Il emmena ses amis à son tremplin préféré. Il s'envolait, impressionnant dans les airs, montait haut et retombait parfait sur la piste enneigée. La ligne pure qu'il décrivait dans le ciel lumineux semblait avoir été dessinée d'un seul trait par la main d'un grand maître.

C'est en fin de journée, sur le chemin de la Pâtisserie, qu'ils furent assaillis par une bande de joyeux garnements : ils s'amusaient à lancer des boules de neige sur tous ceux qui passaient. Ils étaient quand même trop loin pour que les boules atteignent toutes leur but. Elles s'élevaient et retombaient souvent à côté de leurs cibles. Bien rares étaient les boules plantées dans les bonnets.



Tous contre Un ou Un contre Tous
Illustration par Jos Leys

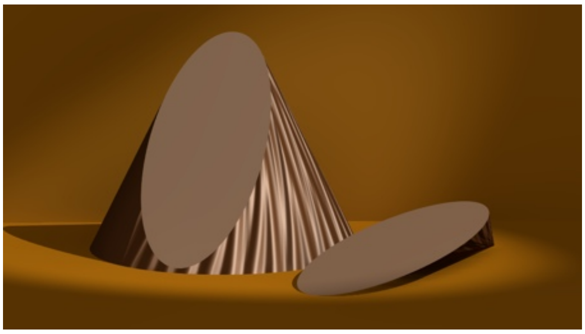
Qu'importe, ce qui était intéressant était de provoquer, de s'amuser. Céphaline ne fut pas la dernière à se démener et à répliquer. Kangourou était celui qui lançait le plus juste. Sphalos, placide, se contentait de compter échecs et réussites.

Ils en eurent vite assez et abandonnèrent la partie. Profiter des bienfaits du pâtissier était autrement attirant.

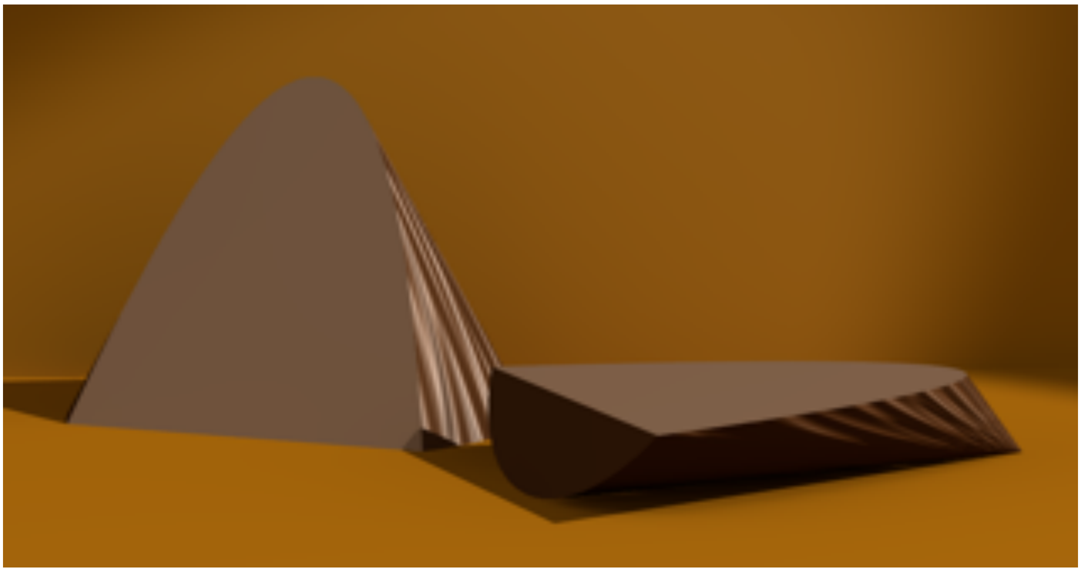
Ce soir-là, le Chef aux trois toques avait décidé de présenter ses cônes pleins de chocolat sous trois décors. Ou bien la surface du cône était nappée de sucre blanc, quelques fibres partant du sommet étant rendues visibles sous la forme de filets en chocolat, ou bien au contraire sur la surface couleur chocolat du cône, quelques fibres de sucre blanc couraient en descendant du sommet, ou bien enfin, la surface du cône avait été nappée de sucre teinté en vert, alors que les fibres présentes affichaient le rouge vif.

Céphaline, Kangourou et Sphalos reprirent leur jeu de dégustation-découpe. La coupe transversale aux axes du cône n'avait plus de secret pour eux. C'était toujours des ellipses de taille diverse, voire plus exceptionnellement des cercles, quand la cuillère était bien perpendiculaire aux axes verticaux des cônes.

Ils s'entraînèrent tous trois à faire des sections parallèles aux fibres. Le plus souvent bien sûr, les sections étaient presque parallèles à ces fibres. Les bords de leurs découpes étaient alors des ellipses très allongées, un foyer restant près de la fibre alors que l'autre partait au loin.



Faisant et refaisant avec le plus grand soin possible leurs découpes, ils comprirent que lorsque la section devenait rigoureusement parallèle à la fibre, alors le foyer s'en allait très très loin, vers l'infini.



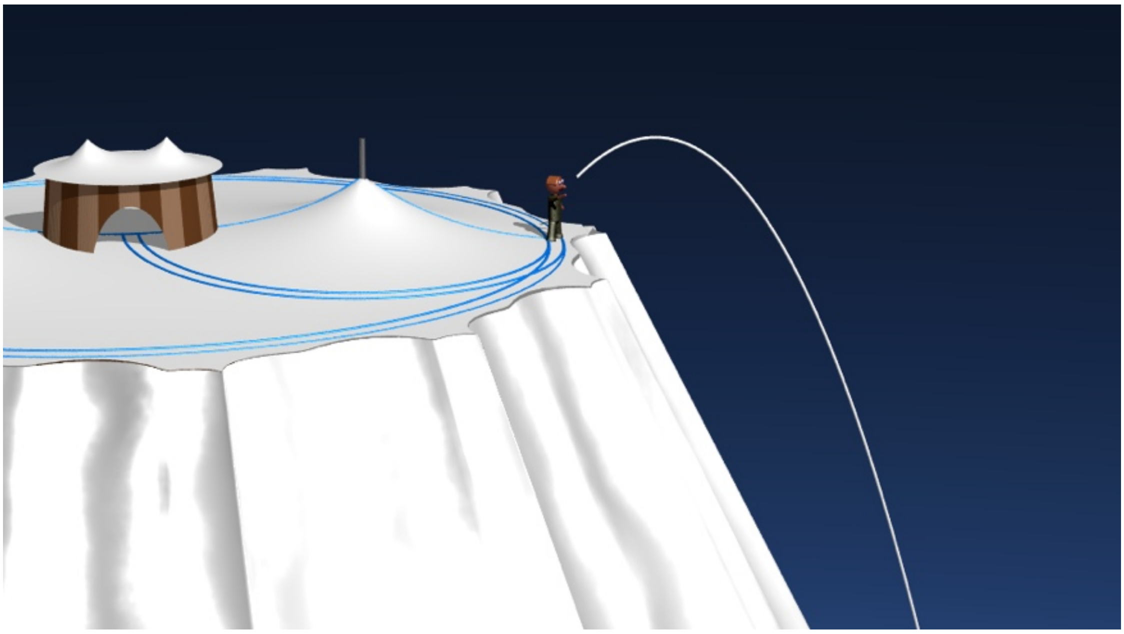
Illustrations par Jos Leys

- Vous obtenez non plus des ellipses, mais des courbes qui se rapprochent des ellipses et qu'on appelle pour cela des paraboles, dit le mystérieux Père Noël au sourire en coin qui, comme par hasard, passait par là.

Le temps de se retourner, il avait une fois de plus presque disparu.

Sphalos avait ceci de commun avec le divin Ulysse qui naviguait sur les mers, d'être grec. Il partageait de plus avec lui d'être très fûté. Sphalos fit la comparaison suivante :

- Vous vous souvenez, dit-il à Céphaline et Kangourou, des boules de neige que nous jetions quand nous étions sur le toit du Mont Circus ? Elles s'élevaient dans le ciel puis retombaient au plus profond des précipices, si loin dans les abîmes que nous avions l'impression qu'elles ne finiraient jamais leur course ! Et si la ligne que suivait leur trajectoire était semblable à celle d'une parabole ? Il en serait bien sûr de même pour les lignes des trajectoires que suivaient les boules de neige que nous lançaient tout à l'heure nos assaillants.



Céphaline lance une boule de neige

Illustration de Jos Leys

- Mais ce serait aussi le dessin de la trajectoire de Kangourou quand il quitte le tremplin pour filer vers le ciel, dit Céphaline.

- Et ne serait-ce pas également le dessin de la trajectoire que suit mon doux chocolat chaud quand je le verse dans ma tasse, s'enquit Kangourou. Je demanderai demain à Soleil ce qu'il en pense. Qu'il est délicieux, ce chocolat !

Chapitre 9

LA DÉCOUVERTE DE L'HYPERBOLE

Ils n'avaient pas de chance aujourd'hui. Les jeunes gens d'autrefois l'auraient fait savoir, s'exclamant : « Pas de bol, aujourd'hui ! ».
Ce bol n'a rien à voir avec le bol de la parabole. Encore que la forme du bol rappelle un peu celle de la parabole, près de son foyer.

Pour annoncer qu'elle avait, aujourd'hui, beaucoup de chance, la jeune personne d'autrefois aurait dit : « J'ai un super bol, aujourd'hui ! » Ce bol a sans doute quelque chose à voir avec celui qu'on remplit de l'onctueuse boisson chocolatée.

Un super bol est un très grand bol, seul l'homme qui a beaucoup de chance peut le remplir d'une énorme quantité d'or. Cet homme a vraiment du bol, si toutefois il n'est pas un grippe-sou grincheux, un avare méfiant ou un accapareur mauvais.

Et puis, il y a l'hyperbole. Elle défie toute concurrence. Elle exagère ! L'exagération est telle que personne n'ose dire : « J'ai de l'hyperbole ! »

Et pourtant, Céphaline, Kangourou et Sphalos la découvrirent tous les trois.

Ils n'avaient pas de chance ce jourd'hui, parce qu'une humiditié très froide pénétrait jusqu'aux os, parce que le ciel était bas et gris. Toutes les formes se fondaient dans la neige assombrie.

Soleil, pris de court, n'était pas parvenu à crever l'énorme matelas nuageux qui couvrait tous les Monts. Céphaline, Kangourou et Sphalos n'auraient pas aujourd'hui la réponse à leur question sur la parabole.

Contre mauvaise fortune, il faut toujours faire bon coeur. Autant que faire se peut. Mais que faire, que faire ?

En ces cas, il convient de faire confiance à Céphaline, à toutes les Céphaline. Elles ont la réponse.

- Et si nous faisions quelques emplettes ?

Ils s'en furent derrière Céphaline, en dandinant ou sautillant.
Tous les magasins étaient illuminés, des lumières de toutes les couleurs scintillaient. De toutes les vitrines un air de fête partait. Le mouvement affairé et joyeux animait toutes les rues.

- Où veux-tu aller ? demandèrent Sphalos et Kangourou.

- N'aimez-vous pas les formes élégantes des chaussures, la diversité des bonnets et autres couvre-chefs, toutes ces oeuvres d'art qui accueillent ces fleurs et ces plantes pleines de vie et de fraîcheur ?

- Oui, bien sûr ! répondirent en choeur et en se regardant Kangourou et Sphalos. Ils étaient étonnés que Céphaline n'ait point fait allusion aux bijoux et autres colifichets à oreilles.

- Eh bien alors, suivez-moi !

Dans chaque magasin, la fine Céphaline, pour apaiser ses hôtes, soulignait devant eux les mérites inattendus des objets convoités.

- Regardez ces chaussures. Ne dirait-on pas qu'elles ont en quelque sorte une forme elliptique, bien déformée je vous l'accorde, deux ellipses qui se rejoignent, un foyer devant, à la plante de l'avant-pied, et un autre derrière, au-dessus du coup de pied.

- Céphaline, que d'imagination, tu as inventé la chaussure elliptique, je crois que tu vas faire fortune !

- Moquez-vous, moquez-vous ! Vous n'êtes que des benêts, allons voir les bonnets.

Ils la suivirent en rigolant. Rira bien qui rira le dernier. C'est en ce magasin qu'ils restèrent plus longtemps. On y trouvait et des galurins et des bonnets et des casquettes et des chapeaux et des coiffes de toute sorte, pour l'été, pour l'hiver et la demi-saison, à fleurs, à plumes, à pois et à pompons. Egalement quelques miroirs devant lesquels chacun pouvait avancer, reculer, se pencher, se tourner, s'admirer.

Le cercle, le disque, le cylindre, l'hémisphère, l'ellipse, la parabole, tout y était, et bien sûr également le cône bigarré bruyamment porté par les fées et sorcières, les clowns et les fêtards en tout genre, à Carnaval, aux anniversaires, aux mariages, aux premiers des ans nouveaux.

On trouvait aussi dans les cônes l'affreux capirote espagnol tout noir, ou, au contraire, l'élégant hennin, à la mode il y a plus de six cents ans, qu'on appelle parfois aujourd'hui, figée dans son architecture, la Coiffe d'Apollonius. Elle était secrètement la préférée de Céphaline, même si, aujourd'hui, porter cet haut accoutrement lui paraîssait dénué de sens.

Images extraites de Wikipédia

Visualisation par Dmitri Kozlov

de la Coiffe d'Apollonius, l'une des folies du projet ARPAM

La fleuriste, chez qui ils se rendirent, avait aussi une magnifique collection de vases. Les matériaux les plus divers s’y rencontraient. L’argile du potier faisait bon ménage avec le béton mat, le métal étincelant ou le cristal jouant avec la lumière.

Vase en or
Propriété virtuelle de Jos Leys

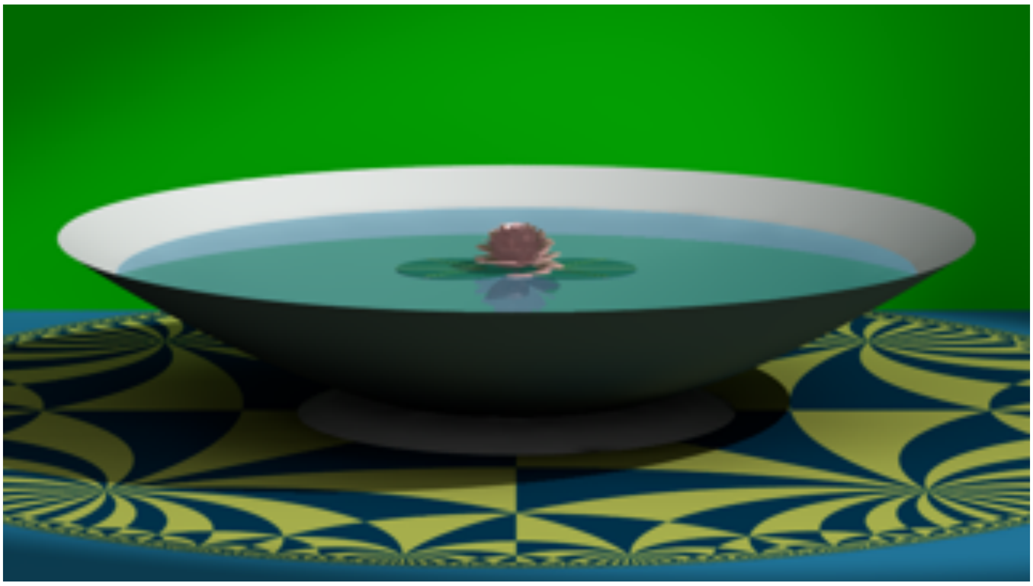
Les formes étaient aussi les plus diverses. Des cylindres de toutes sortes, à base le plus souvent carrée ou circulaire, avoisinaient avec des cônes plus ou moins ouverts, des sphères et hémisphères, et d’autres au profil en forme d’ellipse. Il y avait aussi ces grands vases élancés dont la coupe semblait être celle d’une parfaite parabole.









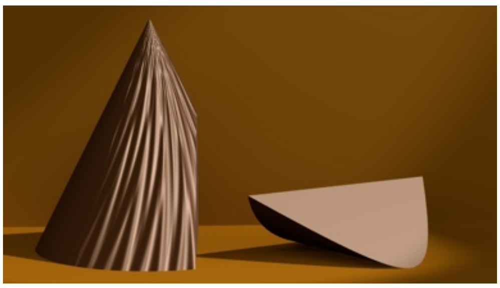


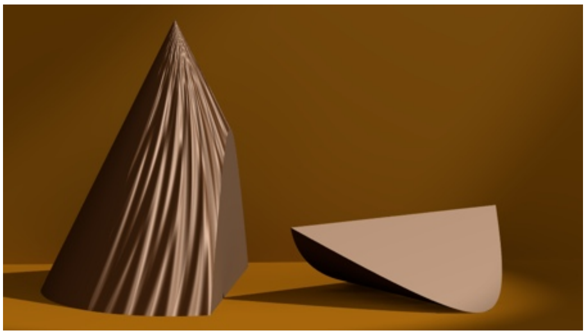
Vase hyperbolique posé sur napperon hyperbolique
Ilustration par Jos Leys

Le regard de Céphaline fut attiré par une large vasque de faible hauteur, où baignaient quelques délicates fleurs d'eau. Elles lui rappelaient ces nénuphars bleus et verts reposants, dont la délicatesse et le charme avaient conquis Monet, ce peintre de la vibration lumineuse.

La vasque elle-même était fort évasée, bien davantage que ne l'étaient les paraboles.

- Comment appellerions-nous la forme de cette vasque ? demanda-t-elle à ses compagnons. De la parabole elle en a bien la rondeur et l'élan, mais elle semble trop peu incurvée à sa base pour pouvoir faire partie de cette famille. Qu'en pensez-vous ?
- Tu as sans doute raison, dit Kangourou. Elle me rappelle plutôt la forme des sections de cônes que je faisais à la pâtisserie, toutes parallèles à leur axe. Leur évasement est beaucoup exagéré.





- Alors appelez-les des hyperboles, souffla le mystérieux Père Noël au sourire en coin qui, comme par hasard, passait par là.

Le temps de se retourner, il avait une fois de plus presque disparu.

Chapitre 10

LES SECRETS DE SOLEIL

Après la pluie, le beau temps. Ce qui arrive souvent. La vie est une roue qui tourne dit le vieux philosophe chinois : une fois en haut, une fois en bas.

Il avait neigé toute la nuit. La neige avait silencieusement couvert d'un doux tissu blanc, sur toute leur étendue, forêts et montagnes. Discrets sous leur couverture, pics et cimes montraient un dos rond.

Soleil, plein d'allant, en plein milieu du ciel, rayonnait. Il dominait de haut les plus lointains sommets. Il éclairait en bas les plus petites aiguilles.

Le cristal de neige sur leur faite
Brise en vibrations chromatiques
Les rayons de lumière parfaite
Qu'irise le diamant prismatique

Les sapins aristocratiques
Ont revêtu leur manteau blanc
Les sapins aristocratiques
Scintillent sous le soleil blanc.

Seul le Prince des Kangourous pouvait regarder en face le disque brillant s'appropriant le ciel bleu, inondant de lumière tous les cristaux de neige.

- Bonjour, Soleil, que je suis heureux de te revoir si joyeux. Tout le monde te salue. Tu nous as manqué hier. Que ferions-nous sans toi, que ton pouvoir attirant est grand !

- Cela est vrai, Kangourou, je vous apporte la lumière, et à travers elle, l'énergie première qui fait grandir. Regarde toutes ces plantes qui se tournent vers moi, elles boivent sans fin ces flots de semi-particules que je leur envoie. Mais il y a encore autre chose : je vous attire aussi parce que je suis, comme tu l'as dit, grand, très grand, je n'ose pas dire gros. D'instinct on se rapproche devant les personnes solides qui peuvent à l'occasion vous protéger. Je vous attire donc parce que je suis gros et fort, et si j'étais encore plus gros, je vous attirerais encore davantage. La Terre qui t'a vu naître, n'est, certes, pas aussi grosse que moi. Mais quand même, sa taille n'est pas négligeable, elle attire aussi tout ce que tu vois. Regarde, tu lances une pomme ou une boule de neige vers le ciel, elle ne monte pas très haut, et finit par retomber sur le sol, pourquoi ? Parce que la Terre est très grosse devant la boule de neige, et l'attire. Bien sûr, plus je suis loin de vous, moins forte est l'attraction que j'exerce sur vous. Comme la grosseur de la Terre n'est pas négligeable, elle m'attire aussi, mais d'autant moins que je suis plus loin d'elle.

- Intéressant ce que tu me dis là, Soleil. Mais je suis gros moi aussi, devant la pomme, et pourtant elle ne vient pas spontanément jusqu'à moi ?

- Tous les objets autour de la pomme l'attirent, et tu n'es pas assez gros pour que ta force d'attraction l'emporte sur celle de la Terre qui, autour d'elle, prédomine.

- Je vois, moi le Kangourou merveilleux, je ne suis donc qu'une toute petite chose dans l'Univers. Mais les hommes, savent-ils tout ce que tu viens de me dire ?

- Pas tout, si tu veux approfondir, loin de là ! Mais du moins, à force d'observations, ont-ils pu prendre conscience de ce phénomène d'attraction, et trouver quelques règles de son fonctionnement. Lorsque vous êtiez, avec Céphaline et Sphalos sur le toit du Mont Circus, j'ai évoqué les noms de Képler et de Newton, donnés aux pics situés aux foyers des ellipses que vous avez dessinées. Je ne sais pas pourquoi le nom de Galilée n'a pas été donné à la guérite située au centre du roc. Ces trois-là, Képler, Galilée et Newton, mais aussi aidés de tant d'autres, ont beaucoup fait pour comprendre et prévoir bien des mouvements dans l'Univers.

- Ils peuvent donc expliquer pourquoi la Terre décrit une ellipse qui tourne autour de toi, Soleil, majestueusement assis en l'un de ses foyers ?

- Oui, Kangourou. Et ils peuvent aussi t'expliquer pourquoi, lorsque tu lances une boule de neige, la ligne de trajectoire qu'elle décrit, cette courbe qui monte et qui descend est toujours une parabole.

- Ah ! C'est donc bien ça ! Sphalos et Céphaline avaient donc deviné juste, lorsque nous étions, l'autre soir à la pâtisserie, à deviser sur cette parabole. Mais, Soleil, n'est-il pas merveilleux que ce simple cône de lumière que tu nous as montré, renferme, sans qu'ils n'y paraissent, tant d'incroyables secrets. Y en aurait-il d'autres dont tu ne nous a point parlé ?

- Oui, Kangourou. Il y en a d'autres encore plus secrets, liés à la lumière, et que je garde, secrets. Car vois-tu, si je les livrais tous, les hommes s'ennuieraient, alors qu'ils sont si heureux, ces grands enfants curieux, de jouer au détective, d'échafauder des hypohèses, d'inventer des outils pour essayer de les vérifier, de dépenser tant de leur énergie pour me comprendre mieux !

- Merci Soleil, grand merci ! Tu prends soin des hommes, comme le père de ses tout jeunes enfants. Protège-les bien, veille bien sur eux ! Dans leur innocence, ils sont aussi capables de faire tant de bêtises ! Oui, veille bien sur eux !

NOTES «HISTORIQUES»

Introduction

Comme le précédent (*Le Kangourou Merveilleux*), ce texte s'adresse aux enfants de 3 à 103 ans. Il est toutefois probable qu'ici seules quelques belles illustrations attirantes feront l'objet du regard intéressé des moins de 10 ans. La lecture du texte demande davantage de maturité.

Son contenu est une manière ô combien modeste de combler un vide, de réparer une insuffisance grave des enseignements secondaires actuels :

- l'absence de la géométrie et de sa référence au monde physique à partir de laquelle elle a été construite et qu'elle permet de mieux comprendre,
- la formation de l'esprit à la perspective historique, à la connaissance de la manière fort riche selon laquelle la civilisation s'est développée,
- l'ignorance d'éléments importants du savoir de notre société, leur contenu intellectuel et culturel.

Les élèves des lycées autrefois apprenaient les propriétés fondamentales des coniques. Elles avaient notamment été rassemblées et développées par Apollonius de Perge (262-190 avant J.C.) dans un traité important. Près de 1800 ans plus tard, l'emploi de ces coniques a permis de fonder et de développer l'étude cinématique et dynamique des mouvements les plus apparents dans notre système solaire. Comment ignorer ce fait majeur ? Pourquoi l'occulter ?

Il est évident que ce n'est pas la découpe répétée des cônes en chocolat qui a contribué à la découverte des coniques. Il s'agit là d'une histoire plutôt plaisante pour adolescents de tous âges, destinée à retenir si possible leur attention. C'est bien sûr, on ne manquera pas de reprocher la présence de ce bien sûr, une vue synthétique des ombres portées par les objets divers de l'époque ayant la forme d'un disque (en pariculier les plats et coupes, les boucliers) qui a conduit aux développements de la théorie des coniques.

Le présent texte n'est vraiment qu'une toute première introduction et initiation à cette théorie des coniques et à son emploi. Ce n'est pas pour cela un texte ringard qui fige l'esprit du lecteur sur une connaissance passéiste de la géométrie. Des notions géométriques assez générales, englobant les données anciennes, introduites au siècle dernier, servent désormais de cadre aux travaux de géométrie et à leurs applications. Quelques-unes de ces notions parmi les plus importantes, qui paraissent fort naturelles, sont introduites ici de manière informelle et simple, ce qui permet de de dépasser le cadre parfois trop restreint des définitions standard.

Le lecteur devient ainsi préparé à entrer de plain pied dans le monde des mathématiques d'aujourd'hui.

Chapitre 1

Pages 3 & 4

La lumière joue un rôle fondateur dans le développement de la vie, dans notre découverte du monde, notamment à travers les représentations symboliques de ce monde, en particulier celles dont le corpus constitue ce que l'on appelle la géométrie.

Dans ce texte d'initiation, seules trois notions «géométriques» élémentaires mais basiques font référence à ce rôle joué par la lumière. Deux notions, dans cette page, pointent le bout de leur nez : celle de rayon lumineux et de droite d'une part, celle de fibre d'autre part. Ces deux notions resteront présentes tout au long du texte.

Apparaît ici le mot semi-particule, alors que physiciens et cosmologistes emploient encore celui, plus court il est vrai, de particule. Que sait-on, aujourd'hui, sur les propriétés généalogiques de ce monde d'objets si petits ? Un livre excellement écrit d'Hubert Reeves, «Dernières Nouvelles du Cosmos», aborde ces questions en termes simples.

On pourrait également introduire le terme de sous-particules, qui se situent en amont des semi-particules, et qui seraient conçues comme perturbations singulières d'un champ premier. Leur existence locale est équivalente à une stabilité locale, qui se traduit par la présence d'un groupe local de symétries. Deux caractères traduisent le fait que la présence d'un groupe implique une certaine stabilité : d'une part un groupe est caractérisé par le fait qu'une opération puisse être répétée conduisant à la présence d'un élément de même nature que les précédents (une structure plus élémentaire de groupoïde pourrait donc faire l'affaire), d'autre part tout groupe possède des éléments symétriques qui permettent de revenir en arrière, donc traduisent la possibilité d'une certaine réversibilité stable.

Parmi les semi-particules, celles de lumière appelées photons, conservent la propriété exceptionnelle, singulière, de n'avoir aucune masse.

Janus était le premier des dieux romains. Dieu des commencements, des ouvertures et des fermetures des portes. J'en ferai aussi volontiers le symbole de l'ambiguité, lui associant la singularité cusp, constituée de deux branches symétriques qui naissent d'un point singulier où réside un devenir encore totipotent, chaque branche représentant à la fois l'une des faces du dieu, et l'incarnation d'un premier devenir.

Page 5

Troisième notion «géométrique» issue du fait lumineux, la notion de cône, à travers l'expression « cône de lumière ». Le cône, ici, se situe dans ce que nous appelons l’espace usuel. Comme on le verra plus loin, la notion de cône est bien plus générale.

Apparaît ici la notion générale d’espace, à l’intérieur duquel on peut se mouvoir, ensemble des lieux où peuvent advenir des évènements, sans autre référence aucune, a priori, à d’autres propriétés possibles.

Page 6 & 7

La notion première de fibre est ici liée à la possibilité de mouvoir dans l’espace, dans deux directions distinctes au moins perpendiculaires, plus généralement transversales, l’une à l’autre - ce qui exclut que l’on puisse considérer la ligne comme un espace.

La ligne, comme le point, sont de véritables abstractions mathématiques. Une portion de ligne n’a pas de masse a priori, elle ne possède pas de torsion physique intrinsèque comme le fil matériel. Pourtant, considérons un ruban rectiligne et faisons tourner l’un des bords de 180°. La ligne médiane séparant le ruban en deux parties égales reste globalement invariante, alors que pivote tout segment perpendiculaire à cette ligne, en particulier tous les points de ce segment, y compris celui qui est situé sur la ligne médiane : remplacer le segment par une petite barre métallique permet de mieux saisir le phénomène. Une représentation analytique convenable de cette ligne se doit d’exprimer cette rotation. Autrement dit, on attache à tout point de la ligne un ensemble (qui peut être multidimensionnel) de rotations. On peut alors étendre ce type de représentation à toute courbe, comme en particulier aux courbes périodiques habituelles, conduisant alors à des séries de Fourier sans doute plus pertinentes que les habituelles dans la représentation du monde physique.

Les fibres sont d’abord vues ici comme les traces, les trajectoires observées d’objets qui se déplacent. De telles fibres sont celles dont une évaluation de la «grosseur», de la dimension, est la plus faible, mais il y en a tant d’autres...

Chapitre 2

page 8

«Le Mont Sirius était célèbre. C’était l’endroit où, paraît-il, il fallait aller pour mieux comprendre les choses de ce monde. Et cela dans tous les domaines.»

Voilà qui pourrait donner lieu à de nombreux développements. Choisir le bon point de vue, s’y rendre, en tirer les conséquences est un exercice intellectuel des plus formateurs, et des plus utiles pour comprendre, voir différentes propriétés, et agir au mieux.

On reviendra sur ce point.

page 9

Apparaît ici la notion si importante de singularité (http://arpam.free.fr/Sing.pdf). Un cône est objet ayant une singularité, son sommet, un point. Une singularité d'un objet est totipente, c'est-à-dire qu'elle renferme toutes les formes d'expression de l'objet. Par exemple, dans le cas du cône, toutes les trajectoires que l'on peut faire en se déplaçant sur ce cône, cercles ellipses, etc, peuvent par déformation se réduire à ce point singulier par pivotement et glissement du plan de section.

Chapitre 3

page 11

Préparée, entre autres, par le philosophe et mathématicien du 17-18ième siècle, Leibniz, défenseur de la continuité du mouvement («*la loi de continuité*» écrit-il), la technique d'étude faisant appel à la déformation ou «*succession insensible*» a été particulièrement promue au siècle suivant par le mathématicien Poncelet (cf le chapitre II de http://arpam.free.fr/Chap.%20I,%20II,%20II,%20IV,%20AB.pdf). Elle lui a permis d'apporter des développements nouveaux et importants à ce qu'on appelle l'étude des coniques, l'étude des sections de cônes par des plans.

Cette technique très féconde, également mise en avant par le savant du 18ième siècle Roger Boscovitch, est largement utilisée en topologie. Elle rencontre ses limites lorsque se produisent des phénomènes singuliers de bifurcation. Le mathématicien-physicien Cauchy, contemporain de Poncelet, est sans doute le premier à avoir attiré l'attention des «continuistes» sur l'imperfection de leur démarche.

Le philosophe chinois Lie tseu «naquit vraisemblablement vers 450 avant J.-C.» Il se serait sans doute bien entendu avec Leibniz et Poncelet. Je ne résiste pas au plaisir de citer l'article qu'il a écrit sur «Le Devenir» :

> Yu Hiong dit : «Le devenir cyclique ne cesse jamais. Qui est capable d'appréhender les changements secrets du ciel et de la terre? Car, lorsque les choses diminuent d'un côté, elles augmentent de l'autre. Ici elles prennent pleine consistance, là elles se vident. Il y a épanouissement et décrépitude qui s'engendrent et meurent perpétuellement. Leur apparition et leur évanouissement sont liés par d'invisibles transitions. Qui y est attentif ?
>
> Nulle part on ne voit la force augmenter d'un coup, la forme cesser brusquement (d'exister); c'est pourquoi on ne s'aperçoit ni de leur épanouisssement, ni de leur évanouissement. Ainsi l'homme, de la naissance à la vieillesse, change chaque jour dans son aspect extérieur et dans ses aptitudes : peau, ongles et cheveux poussent et tombent continuellement. Il n'existe pas d'arrêt dans le changement d'aucun état. Mais les transitions sont imperceptibles. C'est seulement après qu'on les reconnaît.»

page 13

L'ellipse présente un défaut par rapport au cercle : sa «rotondité» n'est pas parfaite. Il lui manque quelque chose. Comme les Grecs anciens employaient le terme ellipse pour désigner une insuffisance, Apollonius put désigner de ce nom cette courbe remarquable.

Chapitre 4

page 15

Le grand penseur dont il s'agit est bien sûr le grand géomètre grec, Apollonius de Perge (-262,-190), né en Turquie, mort en Egypte à Alexandrie, la capitale intellectuelle de l'époque. A son sujet, lire par exemple http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/htm/Vitrac/grec-8.html.

page 16, 17& 18

On rencontre ici pour la première fois la notion de vitesse, sous une forme intuitive. Elle sera, plus tard, interprétée et codée en terme de vecteur, représentée par une flèche, ici par un ski de couleur jaune. La notion de vitesse est évidemment locale, bien précisée en chaque point d'une trajectoire. La remarque selon laquelle sont différentes les orientations des vitesses selon une fibre d'une part, selon une trajectoire qui coupe la fibre d'autre part, est mise à profit dans les études plus complètes des espaces (fibrés). Le terme «transversal» est utilisé pour désigner des espaces qui se rencontrent et se croisent franchement en leur domaine de rencontre (pas de parties tangentes l'une à l'autre).

page 19

Apparaît ici, de manière à nouveau intuitive, un autre élément descriptif important d'une forme : la courbure en chacun de ses points. On l'évalue à partir de trajectoires passant par ce point, et des accélérations que prennent les vitesses en ce point.

Est introduite enfin dans ce chapitre une notion très élémentaire de connexion, par l'intermédiaire d'éléments assurant la liaison des fibres entre elles, et qui sont génériquement en position transverse vis-àvis des fibres. Leur courbure est également un élément important de description des formes.

Toutes les notions présentées dans ces chapitres, espace fibré, connexion, courbure, sont utilisées avec beaucoup de succès par les physiciens pour représenter et comprendre un peu ce qui se passe dans la cocotte de Soleil, pour décrire le rôle et les différents types de sous-particules qu'on y trouve, ainsi que la dualité électricité-magnétisme, maintenant comprise seulement du point de vue mathématique.

Lorsqu'on regarde localement les phénomènes, un fibré peut représenter une sous ou semi-particule, la connexion et sa courbure le champ de forces en son entour.

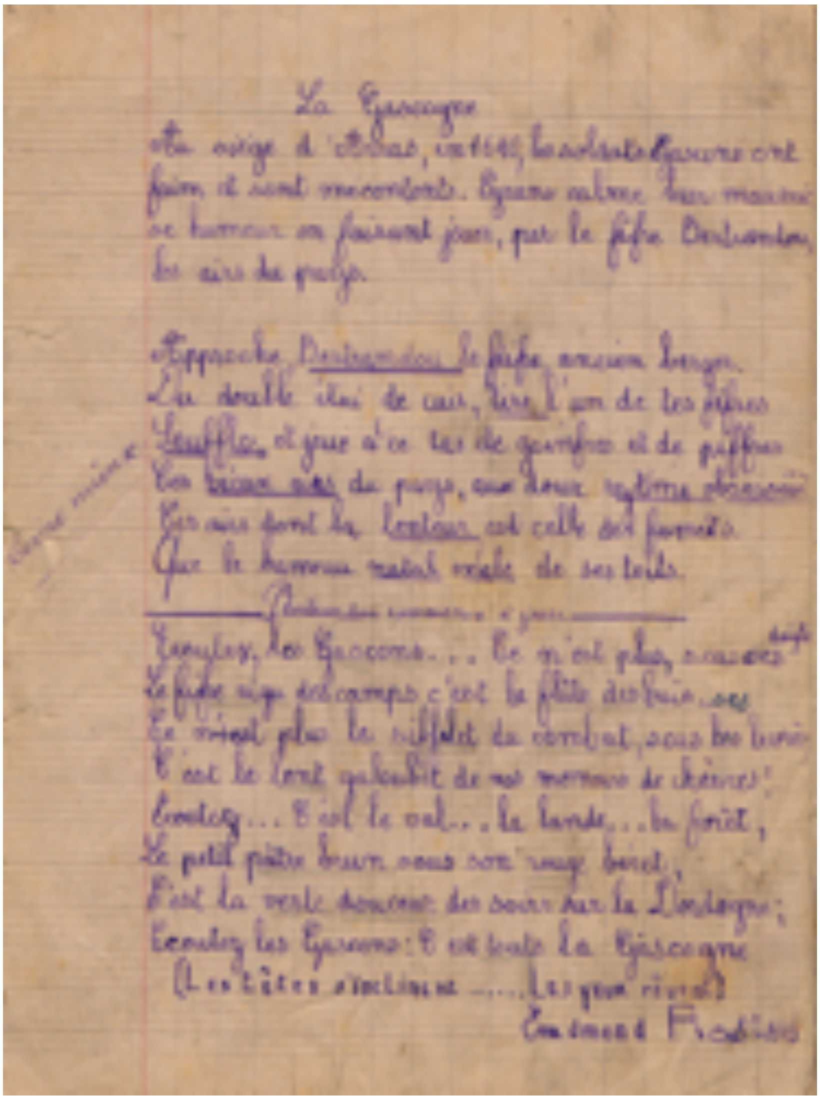
Chapitre 5

Page 21

Le tableau que l'on voit est est une représentation allégorique du protecteur du peintre Guiseppe Arcimboldo, tableau exécuté en 1591 vers la fin de sa vie. Le protecteur n'est autre que l'empereur d'Autriche, Rodolphe II. On peut supposer que celui-ci ne manquait pas également d'humour.

page 22

Ah ! Cyrano de Bergerac ! tel est le titre de la fameuse pièce qu'Edmond Rostand écrivit en 1897. Souvenir d'enfance : je ne sais plus pendant combien de temps l'instituteur, Monsieur Poirier, m'a demandé, au début chaque jour, de réciter ces vers :


La Gascogne
Au siège d'Arras, en 1640, les soldats gascons ont faim et sont mécontents. Cyrano calme leur mauvaise humeur en faisant jouer, par le fifre Bertrandou, les airs du pays.

Approche, Bertrandou le fifre, ancien berger.
Du double étui de cuir, tire l'un de tes fifres
Souffle, et joue à ce tas de goinfres et de piffres
Ces vieux airs du pays, au doux rythme obsesseur
Ces airs dont la lenteur est celle des fumées
Que le hameau natal exhale de ses toits.

Ecoutez, les Gascons... Ce n'est plus, sous ses doigts
Le fifre aigu des camps c'est la flûte des bois
Ce n'est plus le sifflet du combat, sous les lèvres
C'est le lent galoubet de nos meneurs de chèvres !
Ecoutez... C'est le val... la lande... la forêt,
Le petit pâtre brun sous son rouge béret,
C'est la verte douceur des soirs sur la Dordogne ;
Ecoutez les Gascons : C'est toute la Gascogne
(Les têtes s'inclinent ...... les yeux rêvent)
Edmond Rostand

Je sais aujourd'hui qu'ils sont extraits de la scène III de l'Acte IV.
En ce temps-là, on fortifait sa mémoire et on s'enrichissait en apprenant de belles récitations.

page 23

La définition finale de cône qui est donnée inclut bien sûr le cône habituel, puisqu'on peut adjoindre à un cône des qualificatifs qui en précisent des propriétés particulières. Cela dit, comme, le montrent les images chocolatées du chapitre 3, un cône à base circulaire est également un cône à base elliptique : la dénomination adoptée dépend de la section qui est privilégiée et choisie comme base.

Un cône général est lui-même une «montagne» très particulière, une «montagne» étant un fibré dont l'espace des sections comporte des singularités. Le terme «montagne» en ce sens a été introduit en 1976 dans une note au Comptes-Rendus (p. 654), mais la théorie n'y est pas développée.

page 24

Dans cette très vaste théorie où les dimensions topologiques et métriques peuvent être quelconques, l'hémipshère (la colline) est la «montagne» la moins escarpée, la singularité (le sommet de la colline) y est «douce», «dodue». Puis vient le cône porteur d'une singularité «pointue», et ensuite le «bicône» : il est formé par l'union de deux cônes dont les sommets sont distincts, mais partageant la même base, par exemple dans notre cas élémentaire circulaire ou elliptique. On peut alors étudier les sections du bicône par des plans. On peut entre autres rencontrer des sections comportant à la fois deux ellipses, soit une courbe du quatrième degré en termes réels, ou encore des sections comporant une ellipse et une parabole (chapitre 8), globalement donc une courbe du troisième degré en termes réels comme les courbes dites elliptiques standard.

Dans le texte apparaît un phénomène important de bifurcation : un point singulier, le centre d'un disque, éclate en deux points singuliers, les foyers. On peut imaginer des éclatements successifs de ces derniers.

On peut pareillement songer à l'éclatement du point singulier d'un cône, son sommet, en plusieurs points singuliers, par exemple deux, donnant naissance à un bicône.

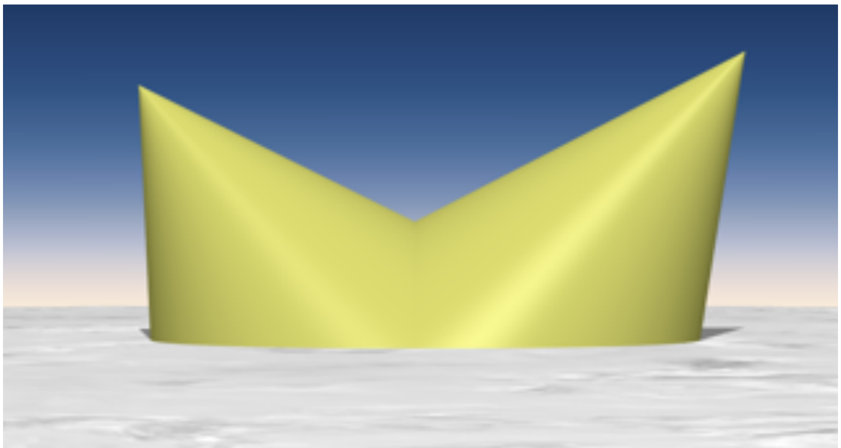


Illustration par Jos Leys

Cet éclatement final est sans doute le résultat physique d'un phénomène d'évolution interne de la masse montagneuse originelle, à l'intérieur de laquelle prennent naissance deux directions privilégiées de croissance (les axes des deux cônes), laquelle aboutit au bicône. L'éclatement a priori d'un sommet de cône en deux sommets est donc plutôt une vue a posteriori de mathématicien.

Chapitre 6

page 25

L'écrivain Robert Merle a écrit 13 volumes qui content avec beaucoup d'allant et d'humour l'histoire des Siorac père et fils, entre 1547 et 1661. Sauveterre, également personnage de fiction, est l'inséparable ami de Siorac père.

On trouvera le catalogue des oeuvres d'Anatoly Fomenko sur le site
http://dfgm.math.msu.su/files/fomenko/myth-vved.php

page 27

Sur la distance en tant qu'évaluation d'un travail cf le chapitre V, page 140-141, Chap.V Prémisses de la géométrie : produits scalaires, longueurs ou formes quadratiques

Alors que dans le chapitre 3, l'ellipse est définie comme section ad hoc d'un cône, on rencontre ici une autre définition classique de l'ellipse, comme lieu des points dont la somme des distances à deux points donnés reste constante.

Chapitre 7

page 29

Le peintre Salvador Dali (1904-1989) est une des figures marquantes du 20ième siècle. Il est l'un des rares peintres à avoir eu une réelle sensibilité aux mathématiques. Il a, en particulier, été obsédé par les cornes de rhinocéros dont la forme conique est aussi liée à une suite de nombres fort connue sous le nom de suite de Fibonacci. On en trouve par exemple l'incarnation dans la disposition des fleurs de tournesol et des aiguilles de pin, lorsqu'on étudie la résonance magnétique entre spins du niobate de cobalt. Plusieurs des oeuvres de Dali, dont sa toute dernière, ont trouvé une part de leur inspiration dans les mathématiques contemporaines.

Le tableau présenté, intitulé *La Madone de Rafael à la vitesse maximum*, a été peint en 1954.

Céphaline ne pouvait donner à ses amis l'explication savante avancée par Dali lui-même :

«J'ai découvert dans Raphaël, on le voit très sensiblement dans le cou, dans la forme du cou, j'ai fait des analyses, tout est formé de même que ces angles, avec des cubes et des cylindres ; Rapahël peignait uniquement avec des galbes, des formes très semblables aux courbes logarithmiques qui sont présentes dans la corne de rhinocéros» (cqfd).

Le site de l'ESMA (European Society for Mathematics and the Arts) est www.math-art.eu .

page 30

Il a fallu attendre près de 1800 ans pour que les travaux des géomètres grecs sur les sections de cône trouvent leur application dans les sciences physiques, permettent de décrire avec exactitude les mouvements des planètes et des corps dans notre environnement solaire !

Par sa connaissance des propriétés de l'ellipse, mais grâce aussi aux progrès dans la fabrication des lunettes astronomiques et dans l'observation des mouvements des planètes, le savant Johannes Képler (1571-1630) a été le premier a établir le lien précis entre la forme de la trajectoire de la terre dans le ciel, et celle de l'ellipse.

Peu de temps après, Isaac Newton (1643-1727), établissant la loi évaluant la force d'attraction entre deux corps, obtint une explication de la présence de cette ellipse, et de celle du soleil en l'un de ses foyers.

L'essentiel du contenu de cette loi est exprimé de façon littéraire en fin du chapitre 10.

Le Colisée est un immense amphithéâtre de forme elliptique, construit entre 72 et 80. Il pouvait accueillir jusqu'à 75 000 spectateurs. Cf http://fr.wikipedia.org/wiki/Colis%C3%A9e

Reconstitution

Vue actuelle de nuit

pages 31 & 32

On est ici au coeur de notre sujet où apparaît le terme essentiel de stabilité. La stabilité a pour fille la symétrie. Elle se déploie, elle s'exprime en symétries.

Je renvoie à la page 49 du premier tome de Topologie et Perception http://arpam.free.fr/DP.pdf

La stabilité se déploie à partir de la singularité, qui est le centre germinal et organisateur de la forme.

Apparaît à nouveau le mouvement, à travers d'abord la déformation continue qui respecte les propriétés fondamentales de stabilité. On quitte le sol plat pour aller dans un espace plus étendu où les possibilités de transformations seront plus nombreuses. Ce mouvement est créatif : une forme nouvelle prend naissance, le cône. Il y a conservation d'une infinité de symétries par rapport aux plans verticaux passant par l'axe du cône. Mais cette élévation a un coût : il se traduit par la cassure en deux de chacun des axes de symétrie rectilignes du disque plan. Bien que situées dans le même plan de symétrie du cône, ces moitiés pendent maintenant de chaque côté du sommet du cône, qui, originellement, occupait le centre du disque. On peut dire, comme les physiciens, qu'un phénomène de brisure de symétrie a accompagné la naissance d'une nouvelle forme.

On a dû se contenter ici de ne prendre en considération que la forme la plus simple d'élévation au-dessus du centre du disque. Par ailleurs, pour les besoins d'une première approche qui se doit d'être limitée, en dehors des notions élémentaires de rayon et de cône de lumière, aucun autre phénomène lumineux lié au disque et au cône, réflexion, réfraction, ombre, n'a pu être présenté, et encore moins exploité pour approfondir un peu la connaissance des propriétés des cônes et coniques.

Il y a encore brisure d'une symétrie interne ou bifurcation, quand, par suite d'un mouvement interne souvent peu accessible, le point singulier originel éclate en deux autres points singuliers.

Là encore, des propriétés nouvelles ou qui étaient cachées se révèlent. On voit ici la puissance et le réalisme de la méthode, du procédé qui consistent à opérer par déformation insensible, mais en allant plus loin que Lie tseu et Poncelet, en prenant en compte le poids impérieux des considérations de stabilité.

page 33 & 34

Les déductions qualitatives qui sont faites méritent naturellement d'être infirmées ou confirmées par d'autres considérations causalement bien établies. Je ne sais pas si quelqu'un a dans le passé employé le même discours que Kangourou pour en déduire l'une des propriétés caractéristiques de l'ellipse et qui lui sert également de définition, au même titre que d'autres. J'ai noté en tout cas avec plaisir, dans la référence donnée au chapitre 3, que le grand, rigoureux et sévère Cauchy s'était satisfait du même genre d'argument pour évaluer l'aire de l'ellipse.

Chapitre 9

page 39

«Folie» est un terme architectural qui désigne ici un petit bâtiment à vocation artistique et intellectuelle. La folie donc, dénommée la coiffe d'Apollonius, fait partie avec neuf autres d'entre elles d'un ensemble architectural codifié sous le nom de projet ARPAM. On en trouve la description sur le site de l'ESMA www.math-art.eu.

Chapitre 10

pages 34 & 35

Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica : paru en en 1687, ce traité de Newton (1643-1727), excellent mathématicien et physicien, donne les fondements de la mécanique dite classique, celle des planètes et des machines au sein du système solaire.

L'une des trois lois fondatrices est ici rappelée en termes littéraires.

Newton s'appuie entre autres mais principalement sur les travaux de Képler et de Galileo Galilée (1564-1642). Également mathématicien et expérimentateur de premier plan, on considère celui-ci comme le fondateur de la physique. Il élabore la loi de la chute des corps et contribue à fonder la dynamique. En s'opposant à la vieille théorie d'Aristote qui faisait de la terre immobile le centre du monde, il entre en conflit avec l'Eglise catholique de l'époque qui le condamnera. *Epure si move*, a-t-il écrit. On peut se demander s'il pensait seulement à la Terre ...

Gometz-le-Chatel, le 21 Décembre 2012

QUELQUES CONCEPTS & TERMES SIGNIFICATIFS

En gras, des concepts majeurs. Pour chaque terme, est indiquée simplement la page où il apparaît pour la première fois. Aucune définition formelle n'est donnée. La compréhension de la signification du terme reste intuitive, elle se renouvelle, s'éclaire et s'approfondit au fil des pages.

REMERCIEMENTS

L'auteur remercie vivement **Anatoly Fomenko** et **Dmitri Kozlov** qui ont accordé leur autorisation à la reproduction de leurs oeuvres, **Patrice Jeener** pour son dessin insolite, et **Jos Leys** qui a consacré tant d'heures à la création de belles illustrations.

LE JARDIN ENCHANTÉ

Claude-Paul BRUTER

Jos Leys

CHAPITRE 1

KANGOUROU ET SPHALOS RENCONTRENT PATHOGYRE

Les gros flocons tombaient en silence. Sous le ciel encore uniformément peint en léger gris, une douce ouate blanche sans ride recouvrait maintenant la montagne. Kangourou et Sphalos se regardèrent, ils échangèrent un sourire. Sans un mot, ils chaussèrent leurs skis. En sortant, déjà, quelques joyeux rayons éclairaient le paysage.

Taillée dans la forêt, encore immaculée, ils suivaient une piste bordée de sapins aristocratiques, élégamment élancés vers le ciel. Immobiles, leurs branches chargées de neige, étincelantes sous le soleil, penchaient avec déférence, et saluaient nos deux amis.

Au sortir d'un virage, la surprise fut totale. Sur la neige étaient tracées des figures géométriques simples, des gravures parfaites sur un matériau léger, aux lignes peu profondes révélées par la lumière. On voyait d'abord un carré, plus loin un rectangle, et plus loin encore, des triangles possédant tous un angle droit, et plus loin encore ...
assis dans la neige, un vieux monsieur vêtu de rouge et à la barbe blanche, une grande barbe, une très grande barbe. Le Père Noël ?

- Êtes-vous le Père Noël, monsieur, est-ce vous qui avez fait ces dessins ?
- Non, les enfants, je ne suis pas le Père Noël, mais son cousin en quelque sorte.
- Son cousin ? Je ne savais pas que le Père Noël avait un cousin ! C'est vrai que vous êtes habillé un peu comme lui, mais vous ne portez pas de hotte. Vous habitez chez lui, où il y a plein de cadeaux ?
- Oh pas très loin de chez lui, il a tellement de cadeaux, le Père Noël, qu'on ne peut plus trouver la place de poser un lit ! Savez-vous compter les enfants ?

- Bien sûr, monsieur, on sait même faire des additions et des multiplications. Mais comment vous appelez-vous ?
- Je m'appelle Zoroastre Pathogyre, on dit que je suis un supermutant, c'est ce qui m'a permis de devenir vieux, très vieux, bien plus vieux même que le Père Noël!
- Plus vieux que le Père Noël ! Ce n'est pas possible, quel âge avez-vous, et où êtes-vous né ?
- Je suis né en Babylonie, il y a seulement cinq mille ans.
- Hou là-là ! Cinq mille, oui, c'est sans doute très beaucoup. Et que faisiez-vous en Bobalynie, des jouets pour le Père Noël?
- Non, pas des jouets, je me contentais de les décorer, et puis je cultivais mon carré de terre, mon jardin. On ne dit pas Bobalynie, mais Babylonie.
- Ce ne serait pas par hasard la Papylonie, le pays où tout le monde devient grand-père, et même un très très grand grand-père, comme vous ?
- Oh, les coquins ! Savez-vous que les grands-pères sont aussi restés des enfants, comme vous ? Mais je vois que vous aimez jouer avec les lettres, échanger leur place dans un même mot, remplacer un lettre par une autre qui sonne un peu de la même façon.
- Mais oui, monsieur Pathogyre, nous aimons beaucoup jouer avec les lettres. Comme ça, quand nous nous échangeons des messages, nous sommes les seuls à les comprendre, et pas nos petites amies ! Sauf Céphaline, bien entendu !
  - Alors comment faites-vous pour savoir que Babylonie et Bobalynie désignent le même pays ?
  - Eh bien voilà, mais il ne faut le répéter à personne, promis ? C'est très simple. Dans chaque mot que nous voulons échanger, nous modifions parfois la place de ces lettres qu'on appelle des voyelles. Quand il n'y a qu'une voyelle, bien sûr, on ne peut rien changer. Quand le mot a deux voyelles, on ne change rien du tout non plus, car sinon on devinerait vite que nous échangeons un message que nous voulons garder secret. Quand un mot a plus de trois voyelles, on change la place des trois premières selon des règles bien à nous.
  - Et quelles sont ces règles, les enfants ?

Kangourou et Sphalos se regardèrent, les yeux de l'un interrogeant les yeux de l'autre. Fallait-il avoir confiance dans ce vieux monsieur qui se disait cousin du Père Noël ? Et si ce n'était pas vrai ?

- Ces règles sont très compliquées, c'est un secret.

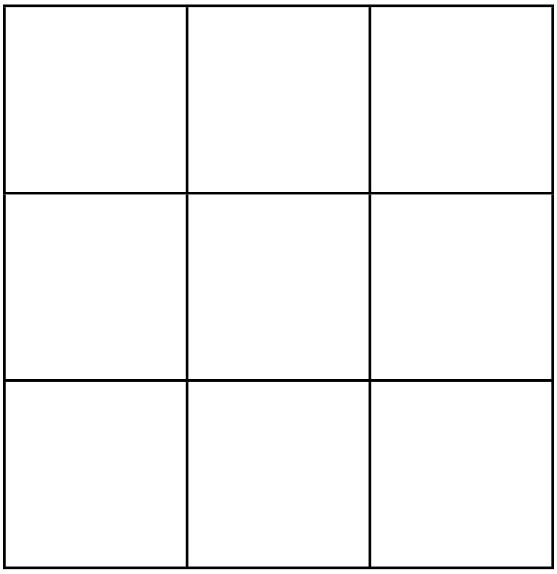
Le vieux monsieur se gratta la barbe. Il fallait à coup sûr respecter le secret. Il n'aurait pas été convenable de chercher à en savoir davantage. Il fallait d'abord mettre en confiance nos amis.

- Je vous comprends, leur dit-il. Je vais plutôt vous parler de mes secrets, à moi Zoroastre Pathogyre.

CHAPITRE II

LE JARDIN DE MONSIEUR PATHOGYRE

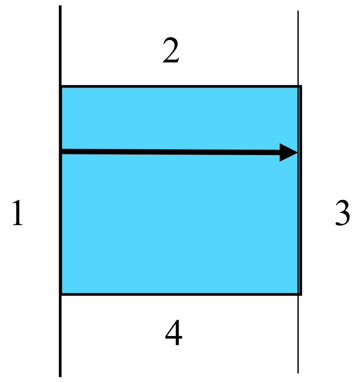
- Je me souviens de mon premier jardin. Oh, ces parfums, et qu'il était beau ! Il avait la forme simple et équilibrée d'un carré.
Je l'avais divisé en neuf carrés égaux, plus petits bien sûr. Je le dessine ici sur la neige avec vous.



- Mais, monsieur, comment avez-vous fait pour fabriquer les petits carrés, de sorte qu'ils soient tous égaux entre eux ?
- Que voilà une bonne question ! Comme la réponse est longue, je ne vous la donnerai pas entièrement aujourd'hui. Regardons ensemble, d'abord comment est fait un carré.

Kangourou et Sphalos se regardèrent à nouveau en hochant la tête. Ils n'osaient pas interrompre le vieux monsieur.

- Il a quatre côtés, tous de même longueur, continua-t-il. Je vais, en tournant, les numéroter, un , deux , trois, et quatre.

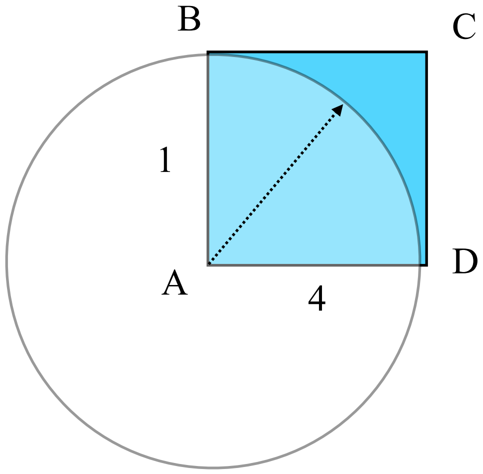


Vous voyez que, si je prends par exemple le côté 1, je peux le faire glisser sur le côté 3, et que les deux lignes, la ligne 1 qui porte le côté 1, et la ligne 3 qui porte le côté 3, semblent ne jamais pouvoir se rencontrer. On dit que les deux lignes et les deux côtés 1 et 3 sont parallèles.

Et que pensez-vous des deux autres côtés 2 et 4 ?

- Ils sont parallèles bien sûr !

- Bravo ! Mais pour amener le côté 4 sur le côté 1, il faut le faire tourner, on ne peut pas le faire glisser. La longueur du chemin sur le cercle entre D et B s'appelle l'angle entre AD et BD.

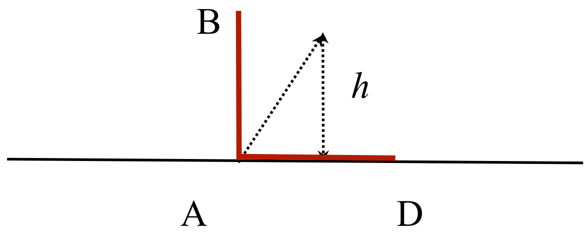


Nous avons rencontré, mouvements fondamentaux, glisser et tourner. Il est vrai que, pour tous deux, Kangourou et Sphalos, ces mouvements n'ont pas de secret. D'ailleurs, amusez-vous simplement à faire bouger vos doigts, vos mains. Regardez-les bien. Font-ils d'autres mouvements que des mélanges de tourner et de glisser ?

- Non, mais nos doigts tournent moins que le côté 4 quand il vient rejoindre le côté 1.

- Vrai ! La Nature nous a fait comme ça. L'essentiel est que nous nous débrouillions bien avec nos dix doigts et nos deux mains. On va appeler A le point où le côté 1 rencontre le côté 4, puis, en tournant, B le point où le côté 2 rencontre le côté 1, en tournant encore C le point où le côté 2 rencontre le côté 3, et enfin D le point où les côtés 4 et 1 se touchent.

Je fais tourner le côté 4, c'est-à-dire le côté AD, autour du point A. Regardez la position de D : lorsqu'il est sur la ligne 4, sa distance *h* à cette ligne est nulle. Au fur et à mesure que le côté AD tourne, l'extrémité mobile D décrit une portion de cercle et sa distance à la ligne 4 augmente. Elle est la plus grande possible quand D arrive en B.



On dit que le côté 1, AB, est perpendiculaire ou orthogonal au côté 4, AD.
Eh voilà ! Ce qui caractérise le dessin appelé un carré est le fait qu'il a quatre côtés d'égale longueur, que les couples de côtés qui se suivent sont perpendiculaires.

- Mais monsieur, nous savons tout cela ! s'écrièrent en choeur Kangourou et Sphalos.

- Oh, mais bravo, que l'on est donc savant aujourd'hui ! Mais je parie que vous ne sauriez pas écrire dans la langue des amis de mon enfance, ces quatre mots glisser, tourner, parallèle, perpendiculaire.

- Non bien sûr, répondirent Kangourou et Sphalos, mais comment faisiez-vous ?

- Oh, de manière très simple. Aux premiers temps de l'écriture, souvent un petit dessin approximatif sur du bois ou sur une pierre tendre permettait de comprendre la signification du message. Alors entre nous, mais entre nous seulement, on avait établi le code suivant :

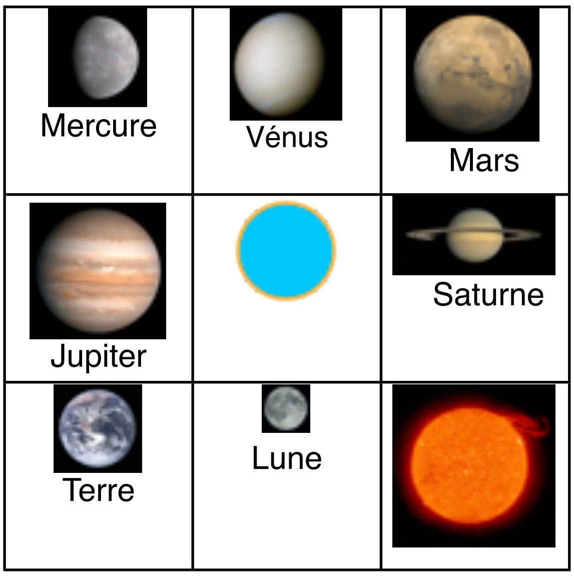
cette gravure, la flèche, ⟶ signifiait glisser,
la gravure d'un rond, du cercle, ○ signifiait tourner,
la gravure de deux petits traits parallèles // signifiait parallèle,
et cette gravure, ┌ signifiait perpendiculaire.

Bien sûr, on ne tenait pas de grands discours avec ces seuls quatre signes, on en avait fabriqué quelques autres, et on s'amusait bien !

Alors au milieu du carré, j'avais installé une vasque taillée dans une pierre teintée en jaune. Elle recueillait l'eau multicolore jaillissant de son centre, de sorte que les milliers de gouttelettes qui s'élevaient dans le ciel dessinaient à leur tour la forme de la vasque. C'était près de ce jet musical que je m'installais pour contempler le ciel.

J'avais appris à regarder les étoiles et les planètes qui nous entouraient, et j'avais donné le nom de l'un de nos astres proches à chacun des petits carrés que j'avais dessinés.

De mon temps, on ne pouvait bien voir que les cinq planètes que vous nommez aujourd'hui Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne. J'ajoutais, comme d'autres, le Soleil et le Lune, et même la Terre sur laquelle nous nous trouvons, puisque nous sommes tous dans le même ciel. Je plaçais la Lune entre le Soleil et nous. Voilà, je vous fais le dessin du grand carré avec, dans chacun des petits carrés, une image de l'astre qui lui donne son nom.



Je pouvais ainsi raconter, comme vous qui pouvez le faire, Kangourou et Sphalos merveilleux, que je me promenais dans le ciel, allant de Mercure à Jupiter, ou plus simplement de la Terre à la Lune. Enivré par les parfums des plantes aromatiques que j'élevais, je n'avais pas besoin de fusées pour aller explorer ces astres. Je rêvais, et les voyais porteurs d'immenses glaciers brillants, de lacs multicolores scintillants, enveloppés de sombres brouillards impénétrables, abritant des monstres terrifiants, offrant à la vue des myriades de fleurs différentes, ou même parfois sonores comme d'étranges instruments de musique, je restais aveuglé par la braise ardente du soleil, d'où s'échappaient d'immenses filets magnétiques incandescents. M'accompagneriez-vous dans ces voyages ?

- Oh oui ! s'écrièrent d'une seule voix, Kangourou et Sphalos. Quand partons-nous ?

CHAPITRE III

GROS-JEAN COMME DEVANT

- Holà mes amis ! De si longs voyages demandent une solide préparation. Ne faut-il pas que les parfums vous enivrent avant de pouvoir entreprendre un tel parcours dans l'univers ? Il convient donc à votre tour de créer un jardin enchanteur analogue à celui de mon enfance, d'où vous pourrez vous libérer des chaînes de la pesanteur terrestre. Je vous aiderai autant que je le pourrai, j'essayerai de répondre à toutes vos questions.

- Merci, monsieur l'Enchanteur, répondirent nos amis, tout en joie à l'idée de créer ce jardin.

Kangourou et Sphalos se consultèrent. Il leur fallait construire un jardin de forme carrée. Mais comment faire pour dessiner un carré ? Ils restèrent silencieux, s'interrogeant mutuellement du regard, chacun espérant que l'autre apporterait la solution à cette question. Sans aucunement réfléchir à aux mouvements naturels qu'ils faisaient, Kangourou tournait en rond, comme sur un cercle, Sphalos avançait et reculait, comme sur une ligne. Ne sachant comment procéder, Kangourou et Sphalos décidèrent d'aller se changer les idées et partirent se promener. Peut-être, au cours de leur promenade, à travers bois, une bonne idée émergerait-elle ?

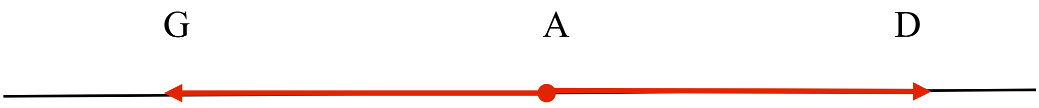
Ce n'est que le lendemain que, soudain, jaillirent dans leur esprit les images des dessins que l'Enchanteur leur avait montrés, lorsqu'il leur faisait voir les premières propriétés du carré : il avait tracé le côté AD, puis l'avait fait tourner de sa position horizontale initiale jusqu'à la position verticale où le point D venait se confondre avec B.

Kangourou et Sphalos se dirent qu'ils pouvaient choisir un point A, et grâce au mouvement de Sphalos, le faire glisser jusqu'en un point D le long d'une ligne qu'ils nommeraient 4. C'est donc ce qu'ils firent :

Ils avaient ainsi construit un premier côté d'un carré.

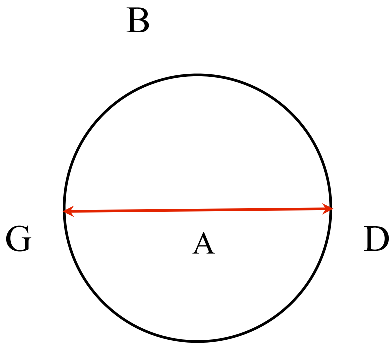
Sphalos fit remarquer à Kangourou qu'il était parti du point A sur sa droite, mais qu'il aurait aussi bien pu se diriger sur la gauche, et atteindre un point G de sorte que D et G sont à même distance de A !

Ils firent alors un dessin qui montrait les deux possibilités :



Mais ensuite, comment obtenir le fameux point B ? Ils savaient, grâce au mouvement tournant circulaire de Kangourou, sur quelle courbe B était positionné, sur le cercle centré en A et passant par D.

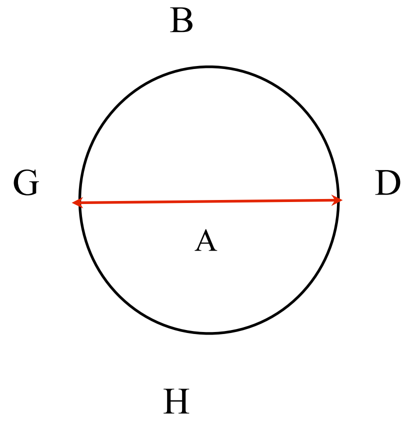
Comme G était à même distance de A que D, ce cercle devait passer par G. C'est bien ce qu'ils observèrent en faisant le dessin :



Cependant, à son tour, Kangourou dit à Sphalos :

- Dis, Sphalos, tu as changé de direction en allant de A vers G au lieu de A vers D, mais moi aussi, je peux tourner en deux sens opposés autour de A. Au lieu d'aller vers B directement en montant, je peux aussi, partant de D, d'abord descendre puis remonter vers B en passant par G !
- Tu as raison, mais oui. Et comme B est le point haut du cercle le plus éloigné de l'horizontale qui porte les points GAD, tu vas passer en bas par un point qui sera également le plus éloigné de cette horizontale.

- Il faut bien lui donner un nom à ce point bas. Appelons-le H comme haut, puisque celui qui est en haut a été appelé B comme bas !
- Excellent. J'inscris H sur le dessin.



Mais, Kangourou, on peut grimper de la même façon jusqu'au point B, soit à partir de G soit à partir de D, lesquels G et D sont sur la même ligne et à même distance de A. B est donc sur le demi-cercle du haut à même distance de G et de D. De la même façon, sur le demi-cercle du bas, H doit être à la même distance de G et de D.

Cette remarque fit réfléchir Kangourou.

- Oui, oui. Si donc on joint B et H par une ligne, et si on replie le cercle selon cette ligne, G viendra en D, les deux demi-cercles vont se confondre. Et comme A est à même distance de G et de D, A se trouvera sur cette ligne BH qui est perpendiculaire à la ligne GD, puisqu'on a dit avec l'Enchanteur que AB était perpendiculaire à AD. Je crois qu'on appelle BH, un axe de symétrie de la figure.
- Tout cela ne nous dit pas comment véritablement obtenir le point B, conclut Sphalos.
- Oui, pour le moment, nous sommes Gros-Jean comme devant. Et si on allait plutôt faire une partie de ping-pong ?

CHAPITRE IV

LA PARTIE DE PING-PONG

De part et d'autre de la grande table bleue, la petite balle blanche volait.

Contre la raquette de Kangourou, ses claquements étaient secs, elle filait comme la flèche, lancée par le revers rapide de Kangourou qui pivotait sur lui-même.

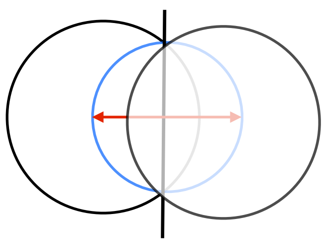
Très rapidement Sphalos glissait aussi vite que la flèche, et reprenant la sphère cellulosique, lui imprimait un mouvement de rotation donnant à la trajectoire de la balle cette allure courbée d'une portion de cercle.

Chacun avait son style, l'un privilégiant le cercle puis la flèche, l'autre privilégiant la flèche puis le cercle. Ils formaient en quelque sorte un couple parfaitement symétrique par rapport au filet rouge qui séparait la table en deux.

Commençant à avoir bien chaud, ils s'arrêtèrent un moment pour échanger leur place, puis recommencèrent leur jeu. Seulement quelques instants plus tard, n'en pouvant plus, essouflés, ils s'assirent pour boire un grand verre d'eau désaltérant et réparateur, commentant leurs exploits.

Soudain, Kangourou dit à Sphalos :

- Tu sais à quoi m'a fait penser cette partie de ping-pong ? Au dernier dessin que nous avons fait quand nous cherchions à fabriquer notre carré. Le cercle était comme notre table, j'étais H par exemple et alors tu étais B, et GA était comme le filet.
- Oui, dit Sphalos. Et comme B et H sont à la même distance de D, ils sont situés sur un cercle de centre D, et comme B et H sont à la même distance de G, ils sont situés sur un cercle de centre G. Autrement dit, ces deux cercles, respectivement de centre D et G, se coupent en B et H. En construisant nos cercles, on obtient nos points cherchés B et H !



- Ouah ! Astucieux, tu n’es pas Grec, fils d’Ulysse, pour rien. Mais, mais comment construire nos cercles puisque nous ne connaissons toujours pas ces points B et H ?
- Tu as raison. Mais attends, attends. Regardons notre figure. Puisque la ligne verticale qui passe par B et H est un axe de symétrie de la figure, tous les points de cette ligne sont à égale distance de D et G. Et donc si je prends deux cercles de même rayon, l’un centré en D, le second centré en G, s’ils se coupent, leurs point d’intersections étant équidistants de D et de G se trouvent sur cet axe de symétrie, qui est perpendiculaire en A à AD.
- Tu as trouvé ! Il suffit maintenant de prendre l’intersection, avec le cercle centré en A et passant par D, de cette ligne qui joint par les points d’intersection de tes deux cercles, c’est le point B, ou d’ailleurs le point H.

Tout heureux de leur découverte, Kangourou et Sphalos s’en vinrent trouver Monsieur Pathogyre, l’Enchanteur comme ils l’appelaient entre eux.

- Nous savons dessiner le carré ! lui dirent-ils joyeusement.
- Comment donc avez-vous fait ?
- Eh bien voilà. Nous nous donnons un côté AD, puis nous allons construire un autre côté du carré qui a un point commun avec AD, par exemple le côté AB. Pour cela, nous dessinons, sur la ligne qui porte AD, le point G symétrique de D par rapport à A. Puis nous dessinons deux cercles de même rayon assez grand, l’un centré en D, l’autre en G. La ligne de leur intersection est perpendiculaire à AD en A. Son intersection avec le cercle centré en A et passant par D donne le point B cherché. Une fois qu’on a B, on construit facilement C, situé à l’intersection, par exemple, des cercles de centres D et B et de rayon AD.
- Félicitations ! Mais savez-vous qu’on aurait pu procéder de manière légèrement différente ?
- Comment cela ?
- Il me faut d’abord vous faire part d’un secret. Je vous le donnerai une fois prochaine, car je dois rentrer, aller arroser les fleurs de mon jardin d’aujourd’hui. Au revoir mes amis.

Un peu déçus par ce départ rapide, Kangourou et Sphalos quittèrent Monsieur Pathogyre, et s'en furent voir leur amie préférée Céphaline pour lui raconter leur trouvaille.

Ce fut moins la manière dont on pouvait construire un carré que l'usage que l'on pouvait en faire qui intéressa Céphaline. Un jardin ? Oui, bien sûr. C'est à son usage décoratif que pensait davantage Céphaline.

- Si vous faites des carrés de couleurs, en bois d'essences diverses ou en céramique teintée, vous pouvez joliment carreler votre sol ou vos murs. D'ailleurs, vous pouvez déformer votre carré en n'importe quel quadrilatère, et quand même faire votre carrelage avec de tels éléments.
- Devons-nous te croire ? dit Kangourou. Pour ma part, je pense davantage au carré de chocolat comme emploi utile de la forme carrée !
- Tu n'es qu'un gourmand, et même un glouton, lui répondit Céphaline, tu ne penses qu'à manger !

Sphalos vient à la rescousse de Kangourou :

- Pourtant en empilant les carrés de chocolat, on peut faire des constructions amusantes, dit-il, et non moins délicieuses. Regarde !

  Il sortit de son sac une boîte carrée, l'ouvrit et montra ce curieux objet :

- Oh! Cela me fait penser aux pyramides en gradins construites par les Mexicains et les Egyptiens, comme celle de Djéser à Saqqarah. Tu me l'offres ce chocolat ?

CHAPITRE V

LE SECRET DE MONSIEUR PATHOGYRE

Cela faisait plusieurs jours qu'ils n'avaient pas vu Monsieur Pathogyre. Et s'il était malade ? Il était fort âgé, et s'il disparaissait sans avoir livré son secret ?

Ils repartirent dans la forêt, aujourd'hui ensoleillée, et allèrent à l'endroit même où ils l'avaient rencontré la première fois. Monsieur Pathogyre, souriant, les attendait.

- Je savais, leur dit-il, que vous viendriez. Vous voulez connaître mon secret, n'est-ce pas ? Alors je vais tout vous dire. Mais je vous préviens, ce sera long.

D'abord, sachez que mon premier jardin carré, celui dont je vous ai parlé la dernière fois que nous nous sommes vus, était petit.

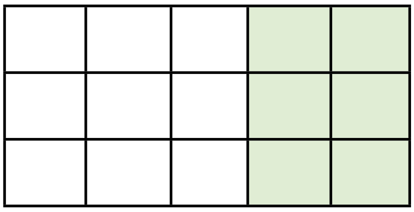
Vous vous rappelez que je l'avais divisé en carrés plus petits. Je n'avais qu'à faire qu'un seul de mes grands pas pour passer d'un petit carré au suivant. Je dénommai l'étendue de ce petit carré, qu'appelle aussi sa superficie ou son aire, par l'expression « pas carré». Comme la longueur de ce pas est très voisine de ce que vous nommez 1 mètre, vous diriez que l'étendue du petit carré est de «un mètre carré.» L'étendue de deux petits carrés était donc de deux «pas carrés», vous diriez de deux «mètres carrés».

Pour construire mon jardin, on avait en quelque sorte empilé sur trois hauteurs, trois petits carrés. Il y avait donc trois fois trois petits carrés, soit 9 petits carrés, et donc l'étendue de mon jardin était de 9 mètres carrés.

Comme 9 égale trois fois trois, on écrit aussi $9 = 3^2$ pour montrer que 3 apparaît deux fois pour obtenir 9, qui est alors appelé le carré de 3. L'écriture 3^3 signifie que l'on fait trois fois le produit de 3 avec lui-même, et donc $3^3 = 27$.

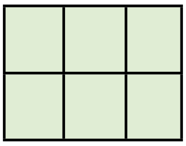
Comme je trouvais mon jardin un peu trop petit, j'ai cherché à l'agrandir tout en souhaitant qu'il conserve sa forme carrée. Je m'en fus trouver mes voisins, leur demandant s'ils accepteraient de me vendre un petit bout de leur terrain qui jouxtait le mien.

Je m’adressais d’abord à mon voisin de droite, celui que je rencontrais le plus fréquemment. Il accepta de me vendre une bande de terre que je pouvais accoler à mon jardin, je vous la colorie en vert.



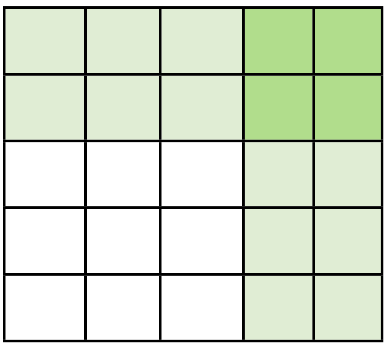
J’avais donc maintenant un jardin de cinq petits carrés sur l’un de ses côtés. Je pris alors contact avec mon voisin du «dessus», lui faisant part de mon souhait : faire en sorte que je sois l’heureux propriétaire d’un jardin carré, dont l’un quelconque des côtés avait 5 pas, ou 5 mètres si vous voulez.

Il ne put faire mieux que d’accepter de me vendre la petite bande de terre allongée que vous voyez sur ce dessin :



Chacun de mes voisins m’avait certes vendu 6 petits carrés, c’était fort aimable de leur part, mais ça ne faisait pas le compte pour moi, je n’avais pas un jardin carré.

Je retournais alors voir mon voisin de droite qui disposait de davantage de facilités. Il accepta de me céder 4 petits carrés supplémentaires : j’avais enfin mon jardin carré plus grand que le précédent :



Son étendue était maintenant de $5 \times 5 = 5^2 = 25$ mètres carrés. J'avais donc agrandi mon premier jardin de $25 - 9 = 16$ mètres carrés.

Je réalisais soudain que 16 était le carré de 4 : $4 \times 4 = 4^2 = 16$, et donc la somme du carré de 3 et du carré de 4 était égale au carré de 5 :

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \quad !$$

Alors ça, c'est curieux n'est-ce pas ? (Ces mots réveillèrent quelque peu l'attention de nos amis qui commençait à se relâcher). J'ai fini par me demander un jour quels étaient les nombres qui pouvaient satisfaire à une égalité du même genre, quels peuvent être les nombres n, p et q qui vérifient la relation

$$n^2 + (n + p)^2 = (n + q)^2 .$$

Mais ce n'est pas de cela que je veux vous entretenir, mais de quelque chose quand même d'analogue à ce phénomène, et qui provient encore de mes travaux de jardinage.

Constatant que son dernier propos avait plutôt quelque difficulté à passionner son auditoire, Monsieur Pathogyre fouilla dans sa poche et en sortit une boîte rose sur laquelle tous les regards se fixèrent. Que pouvait-il bien y avoir dans cette boîte ? En la tournant plusieurs fois de droite à gauche, puis de gauche à droite, notre Enchanteur éleva le niveau d'intensité de l'attente.

Il ouvrit enfin la boîte. Certains étant coupés en deux selon une diagonale du carré qui formait leur base, elle contenait ces sucreries orientales et colorées appelées loukums. Ce fut un moment de délectation partagé autant par Céphaline, Kangourou et Sphalos, que par l'Echanteur lui-même.

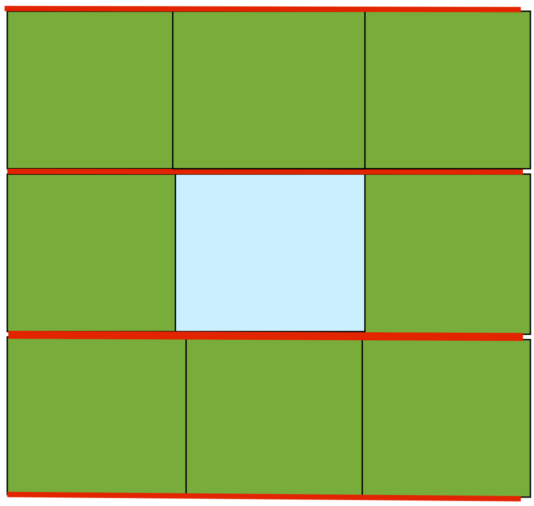
- À l'origine des loukoms actuels, dit-il, se trouve un médicament de mon enfance, à base de miel, avec lequel on soignait les maux de gorge. En hiver, j'emporte toujours dans mes poches l'une de telles boîtes, toujours heureux de pouvoir en partager le contenu avec mes hôtes.
- Ils sont délicieux, dit Céphaline, mais pourquoi certains de vos lokums sont-ils partagés en deux ?
- Parce qu'ils symbolisent le secret dont je vais vous parler.

CHAPITRE VI

LE RÉCIT DE LA DIAGONALE

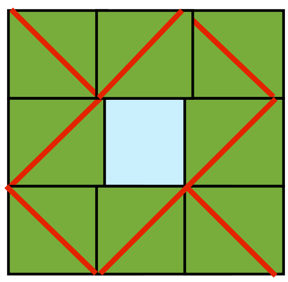
- Il me fallait entretenir mes jardins, planter, arroser, enlever ces coquines de mauvaises herbes, et bien sûr ramasser et cueillir. Mon premier jardin, vous le savez, était tout petit, neuf petits carrés de un mètre chacun de côté. J'ai cherché un cheminement dans ce jardin qui, à la fois me permettrait de bien faire pousser toutes mes plantes, et prendrait la moindre place possible.

Je dessinais mon carré, puis en rouge des éléments de parcours qui me permettaient sûrement d'atteindre tous les points du jardin sans avoir à faire trop d'extension des bras et des mains, le carré central n'étant pas cultivé.



Le dessin me montra aussitôt que la longueur de ce parcours était de 12 mètres. Pouvais-je faire mieux ?

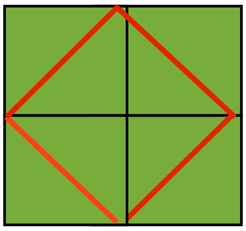
Je fis d'autres essais et aboutis à celui-ci :



J'avais 8 traits rouges au lieu de 12, mais la longueur de chaque trait sur le nouveau dessin était manisfestement plus grande que celle de chacun des traits qui apparaissaient dans le premier dessin où elle valait un mètre. Y avais-je vraiment gagné ?

Il me fallait évaluer la longueur de ces petits chemins rouges qui joignent deux points opposés de chaque carré, et qu'on appelle des diagonales.

Or il se trouve que j'avais fait un essai intermédiaire où je ne tenais pas compte du fait que le carré central ne devait pas être cultivé. Y figurait cette configuration :

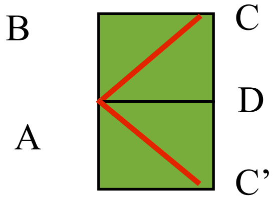


Chaque diagonale rouge partage un petit carré vert en deux parties d'égale étendue. Donc l'étendue du domaine à l'intérieur du chemin rouge, sa superficie, est la moitié de celle du domaine formée par les quatre carrés réunis.

Si a^2 désigne l'étendue, la superficie d'un petit carré, le grand domaine vert formé de quatre petits carrés a pour étendue 4 a^2, et sa moitié est donc

$$2\ a^2.$$

Le dessin suggère aussi que le domaine délimité par le chemin rouge est un carré. Ce qui est déjà certain est que tous les côtés du domaine sont égaux.



Et si d'un sommet A de ce domaine, je fais tourner l'un des deux petits carrés qui ont en commun ce sommet jusqu'à ce que les deux diagonales rouges AC' et AC se confondent, le point D vient bien en B, de sorte que AC est perpendiculaire à AC’. Le domaine délimité par le chemin rouge est bien un carré.

Si donc c désigne la longueur d’une diagonale telle que AC, l’étendue, la superficie, l’aire de ce carré est égale à c^2.

On a vu par ailleurs que cette étendue est la moitié de celle formée par les quatre petits carrés verts réunis qui vaut $2a^2$.

Ainsi, celui qui connaît la valeur de la longueur a du côté du carré, en déduit celle de la diagonale c de ce carré grâce à l’égalité

$$2a^2 = c^2.$$

ou encore, comme $2a^2 = a^2 + a^2$, en se réfèrant au dessin géométrique, dans un carré de côtés AB et BC, la diagonale AC vérifie :

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

N’est-pas magnifique ?

- Oui, dit Céphaline, je ne sais pas si c’est vraiment magnifique, c’est en tout cas esthétique. Alors quand la longueur du côté du carré vaut 1, le carré de la longueur de la diagonale vaut 2. Mais comment en déduit-on la valeur c de cette longueur ?

- Oh, vous savez, avec mes amis, on utilisait une méthode très simple. Pour obtenir un résultat de qualité, il faut mettre en oeuvre cette même méthode plusieurs fois, et donc être patient avant de pouvoir être assez satisfait. C’est une méthode très générale, souvent employée, qui consiste à procéder par approximations successives, chaque fois meilleures.

  2, c’est comme 200 divisé par cent. Nous savons que 14 multiplié par 14 fait 196, qui est proche de 200, et que 15 x 15 = 225. Donc la longueur de la diagonale du carré de côté 1 est comprise entre 1,4 et 1,5 mais plus proche de 1,4, de carré 1,96, que de 1,5, de carré 2,25.

  Pour l’instant, nous avons la possibilité de prendre 1,4 comme approximation, mais cette aprroximation est assez grossière. On va sans doute l’améliorer en prenant comme approximation un nombre compris entre 1,4 et 1,5 : par exemple celui situé au milieu de ces deux nombres, soit 1,45. Son carré, 2,1025, reste plus grand que 2. Mais cette approximation est meilleure que les deux précédentes 1, 4 et 1,5.

Comme ce procédé semble fonctionner, recommençons. Prenons un nombre situé au milieu de 1,45 dont le carré est plus grand que 2, et de 1,4 dont le carré est plus petit que 2. Ce nombre au milieu est 1,425 : son carré est 2,030625, encore légèrement plus grand que 2, mais l'approximation avec 1,425 est meilleure que la précédente 1,45.

Comme tout à l'heure, regardons ce que donne comme carré un nombre situé au milieu de 1,4 et de 1,425, soit 1,4125 : son carré est 1,99515625, vraiment très proche de 2. On pourrait convenir d'adopter 1,4125 comme approximation, en sachant que ce n'est pas la valeur exacte, mais en tout cas une bonne approximation. Cela dit, on peut chercher à faire encore mieux. Courage.

En prenant le nombre 1,41875 situé au milieu de 1,4125 et de 1,425, puis le nombre 1,415675 au milieu de 1,4125 et de 1,41875, et enfin le nombre 1,4140375 au milieu de 1,415675 et de 1,4125, on obtient pour ce dernier un carré égal à 1,99950 ... ce qui est une très bonne approximation.

Comme 1,4140375 est un nombre long, on s'en tient généralement à l'approximation donnée par le nombre court et facile à retenir 1,414 dont le carré est très voisin du précédent (1,999393).

- Ouf! dirent ensemble Céphaline, Kangourou et Sphalos, tout ceci ne nous paraît pas très difficile, mais c'est en tout cas bien long ! Eh si on se reposait un peu ?
- Vos lokoums sont très bons, chuchota Céphaline.
- Mais prenez, prenez, servez-vous les enfants !

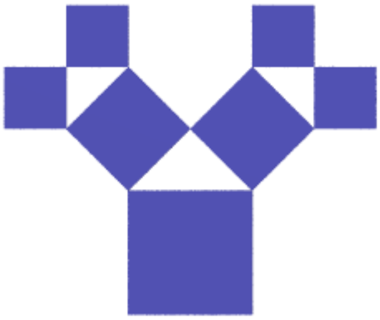
Quelques minutes plus tard, l'Enchanteur ajouta triomphalement :

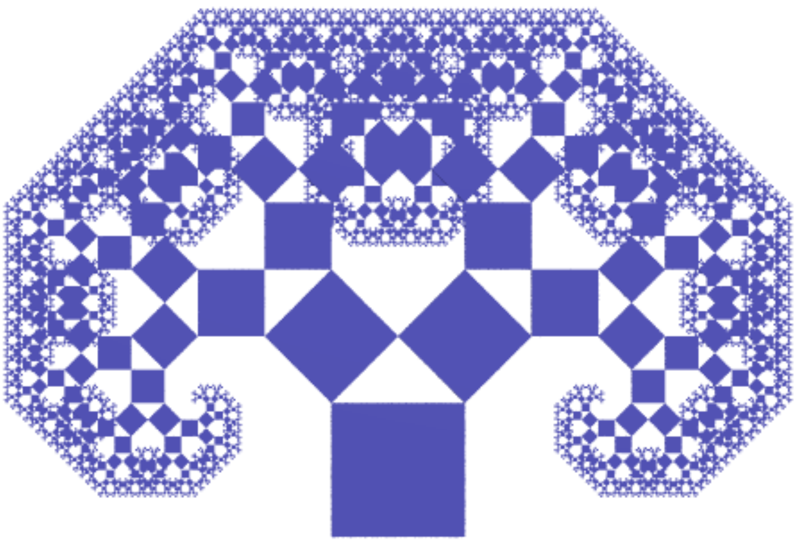
- Vous voyez, en choisissant de travailler mon jardin en diagonale, j'avais gagné en déplacements puisque la longueur de ce parcours, 8 fois 1,414 soit à peu près 11,3, était moindre que les 12 que j'aurais dû faire en choisissant la première solution, la plus simple selon l'apparence.

- Oui, mais la différence est faible, 0,7 dit Kangourou. Valait-il la peine de faire tant d'efforts pour arriver à ce petit résultat ?

- Oh! dit Monsieur Pathogyre. Je travaille dans mon jardin si souvent, disons en moyenne un jour sur deux. Tenez, supposez que je ne m'en occupe que 200 jours par an, sur 1000 ans, j'aurais gagné 0,7 x 200 x 1000 = 140 000 ! Ce n'est pas rien, ça ? Et puis surtout, maintenant tous les hommes, de tous les temps futurs, connnaîtront ces merveilleuses relations, si simples et qui, comme moi dans mon jardin, leur permettront souvent de mieux s'organiser, de moins dépenser, de vivre mieux ! N'est-ce donc pas magnifique ?

- Magnifique n'est peut-être pas le mot qui convient, dit Sphalos. Mais vous avez raison. Le fait que ce résultat puisse être si utile, et surtout qu'il soit vrai partout et de tous les temps tient du prodige. Je dirais qu'il est prodigieux !
- Et vous qui nous l'avez fait découvrir, ajouta Kangourou, vous êtes comme un magicien !
- Vous savez, je ne suis que le cousin du Père Noël !





JL

CHAPITRE VII

ENCORE PLUS ÉTONNANT

De retour au chalet, dans leur cuisine et dans leur salle de bains dont les murs bien droits étaient tapissés de faïences carrées bleues et blanches, Kangourou, Sphalos et Céphaline s'amusèrent à vérifier les dires de Monsieur l'Echanteur, cousin du Père Noël. Après tout, peut-être s'étaient-ils laissé endormir et gruger par des propos rapidement avancés, et qu'ils n'avaient pas eu le loisir de disséquer.

Les mesures qu'ils firent étaient convaincantes, donnaient raison à Monsieur Pathogyre. Ils s'amusèrent alors à reconstituer la chaîne de dessins qu'il leur avait présentés et de raisonnements qu'il leur avait tenus.

Ils s'émerveillèrent de ce que l'esprit humain pouvait parvenir à établir, et de la manière souvent inattendue, selon l'apparence, avec laquelle il procédait.

Il y eut quelques discussions pour savoir comment remercier Monsieur Pathogyre de leur avoir confié un si beau secret. Sous l'influence de Céphaline qui savait fort bien faire les gâteaux, ils préparèrent une pâtisserie au chocolat, en forme de carré bien sûr, le dessus étant recouvert d'une fine pâte d'amande verte, ou bleue, de petites diagonales roses toujours en pâte d'amande : en somme, une reconstitution du premier jardin de Monsieur Pathogyre.

Inutile de dire combien le cousin du Père Noël fut touché par le geste de ces enfants lui offrant ce présent.

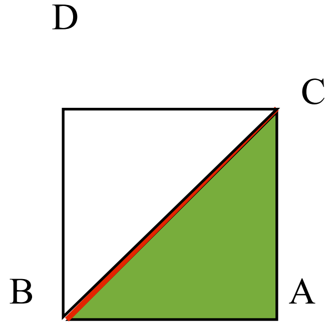
- Même mon cousin le Père Noël ne saurait me faire un cadeau qui me fasse autant plaisir. Merci, merci les enfants, leur dit-il, très ému.
  Alors je vais vous confier que le secret sur le carré que je vous ai révélé n'est que le premier élément d'un secret encore plus vaste qui n'a cessé d'étonner les hommes.

Céphaline, Kangourou et Sphalos s'immobilisèrent, le regard fixé sur Monsieur Pathogyre, l'Enchanteur, le Maître, prêts à boire avidement toutes ses paroles.

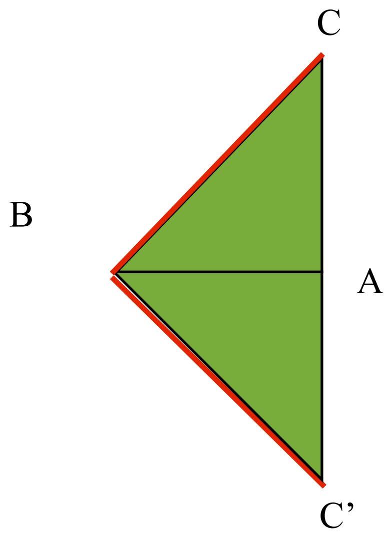
- Vous vous rappelez que, dans un demi-carré qui forme un triangle, le carré de la diagonale, diagonale qu'on appelle aussi une hypothénuse, vaut la somme des carrés des deux autres côtés. On avait écrit :

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

Je redessine maintenant ce triangle ABC

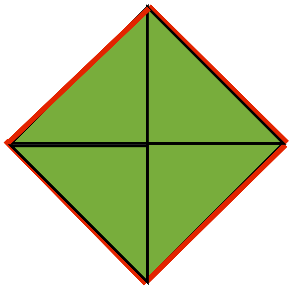


et construis un carré de côté BC, d'abord en doublant le triangle ABC par symétrie par rapport au côté AB, de la sorte le triangle BCC' a même superficie a^2 que notre carré initial ABCD,



puis en doublant le triangle BCC' par symétrie par rapport au côté CC'. J'obtiens ainsi la figure BCB'C' dont l'étendue $2a^2$ est le double de celle du carré initial ABCD.

Cette figure est bien celle d'un carré, d'une part les côtés sont égaux par construction, et d'autre part BC est bien perpendiculaire à BC', car



tourner de BC’ vers BA est égal à tourner BA de vers BC, et tourner de BA vers BC est la moitié de tourner de BA vers BD de sorte que :
tourner de BC’ vers BA puis de BA vers BC, soit de BC’ vers BC, est la même chose que de tourner de BA vers BD.

J’espère que je ne vous ai pas trop fait tourner la tête avec ces observations !

Continuons. La superficie 2 a^2 ce carré est aussi c^2, le carré de son côté et l’on retrouve à nouveau notre fameuse égalité

$$2a^2 = c^2.$$

- Mais, Monsieur Pathogyre dit Sphalos, c’est toujours le même secret, vous nous avez raconté la même chose que la dernière fois où nous nous sommes vus, ou presque !
- Ou presque, c’est bien là le point essentiel aujourd’hui. Mon point de départ est différent du précédent. Car aujourd’hui je me suis donné le triangle ABC et non point un carré comme la dernière fois, et c’est à partir de ce triangle que j’ai construit un nouveau carré.
- Soit, mais le résultat final est le même et nous n’avons pas appris quelque chose de véritablement nouveau.
- Eh bien, attendez encore un peu, vous allez voir. Il m’a fallu beaucoup de temps pour qu’en mon esprit plusieurs faits un peu semblables que j’avais rencontrés finissent par s’organiser en un tout cohérent.

Vous vous souvenez que j’avais agrandi mon premier jardin. La superficie du jardin agrandi était évidemment égale à la superficie du premier jardin augmentée de la superficie des parcelles de terre que j’avais achetées, ce qui donnait la relation

$$9 + 16 = 25$$

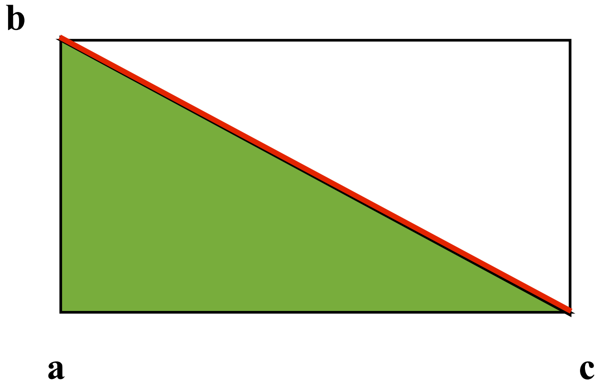
ou encore

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Je ne pouvais que faire le rapprochement de cette égalité avec celle qui caractérise les côtés de notre triangle ABC dont les côtés AB et BC sont égaux, le côté AB étant perpendiculaire au côté BC,

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

Ce rapprochement suggérait qu'après tout, il pourrait exister des triangles **abc** dont les côtés ne soient pas égaux, mais dont la somme des carrés des longueurs de deux côtés soit égale au carré de la longueur du troisième côté.
Le fait que soit présent le même type de relations entre carrés de longueurs suggérait que les triangles ABC et **abc** aient quand même quelques points communs.
Le plus simple était de faire l'hypothèse que, comme l'ancien ABC, le nouveau triangle **abc** ait lui aussi deux côtés perpendiculaires.
Je fis donc un dessin de ce nouveau triangle, dont les côtés **ab** et **bc** sont à la fois inégaux et perpendiculaires :



Comme vous le voyez, un tel triangle est la moitié d'un rectangle : on dit que c'est un triangle rectangle.

Eh bien voilà mon véritable secret : dans un tel triangle rectangle plat **abc**, on a toujours la relation entre les longueurs des carrés des côtés :

$$\mathbf{ab}^2 + \mathbf{ac}^2 = \mathbf{bc}^2$$

CHAPITRE VIII

MONSIEUR PATHOGYRE A RAISON

Sur le moment, la révélation de Monsieur Pathogyre n'impressionna guère nos amis. Pour Céphaline, il semblait peu probable que la connaissance de cette propriété des triangles rectangles ait quelque rapport avec la rencontre du futur élu de son coeur. Pour les merveilleux Kangourou et Sphalos, capables de franchir des distances dépassant toute imagination, ces petites relations étaient d'abord teintées d'insignifiance. Cependant l'attitude de Kangourou, qui rêvait parfois d'architecture, devint moins réservée : une telle relation pourrait naturellement lui être fort utile pour préciser l'importance des quantités de matériau à utiliser. Quant à Sphalos, que Monsieur Pathogyre ait eu besoin de préciser que le triangle devait être plat, l'intriguait.

Le temps avait changé. La clarté du ciel bleu avait été rapidement effacée par l'arrivée menaçante d'une masse nuageuse toute grise. Une humidité glaçante suintait des boursouflures obscures. Céphaline, Kangourou et Sphalos se rapprochèrent de la cheminée. Leur regard s'attachait à suivre les mouvements inattendus de la danse bleutée des flammes. Les braises rougeoyantes répandaient leur chaleur réconfortante et apaisante. Seuls quelques crépitements brisaient par instant le silence.

Ce fut Kangourou qui soudain évoqua le sujet. Cela n'avait rien à voir avec les lourds flocons blancs qui commençaient à tomber, le feu joyeux qui éclairait leurs visages.

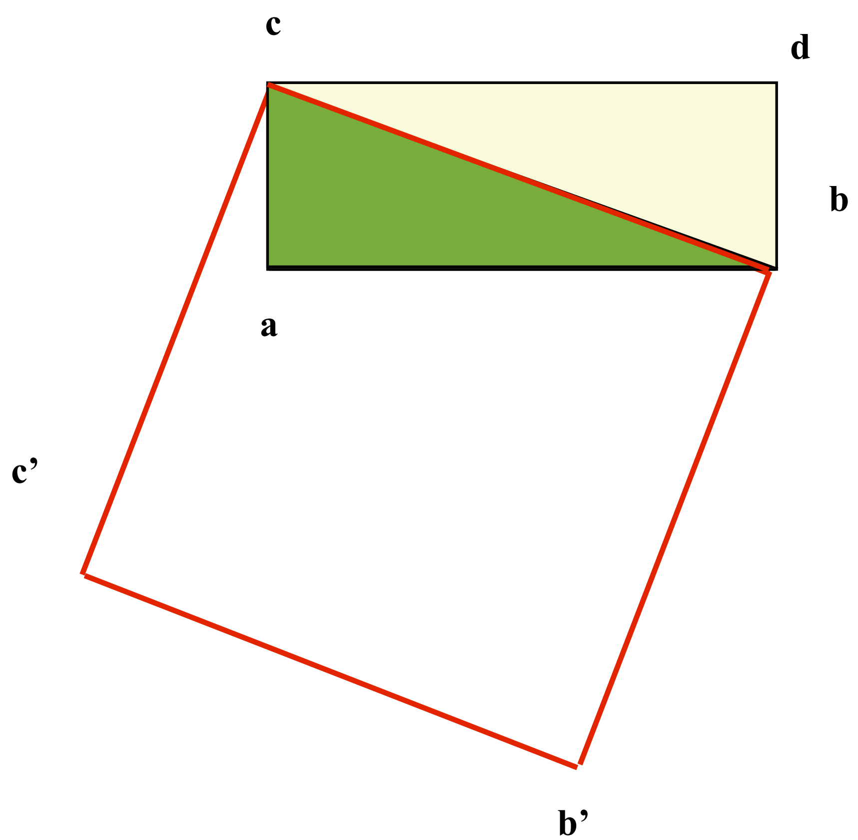
- Et si l'on essayait de trouver comment Monsieur Pathogyre était parvenu à établir sa fameuse relation pour les triangles rectangles ?
- Plats, ajouta Sphalos.
- Pourquoi pas, ajouta Céphaline qui commençait à s'agiter.

Ils prirent chacun une feuille de papier, s'armèrent de crayons de toutes les couleurs. Ils dessinèrent un triangle rectangle rouge et vert.

- Bon, je le dessine comme un demi-rectangle, et puis après ? dit Sphalos.

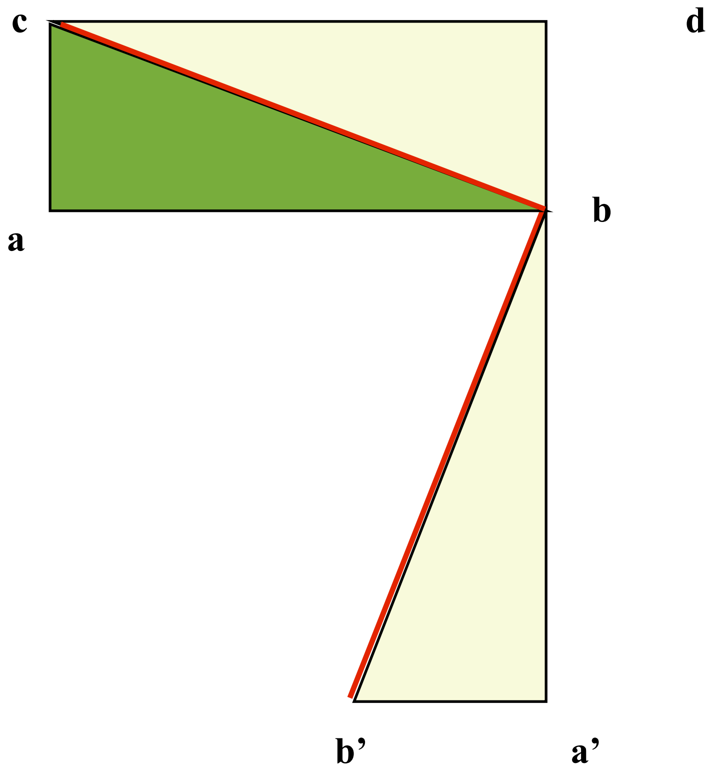
Chacun avait encore en tête les constructions faites par Monsieur Pathogyre, d'où finalement, par ses observations, il avait tiré sa conclusion.

- Et si on faisait comme lui ? pensa à haute voix Céphaline.
- Oui, sans doute, il faut employer son procédé, ajouta Kangourou, puisqu'il conduit au résultat, et que les deux figures, celle du carré et celle du rectangle, au fond diffèrent peu.
- Si donc je reprends le discours de l'Enchanteur, il me semble que c'est en sa fin qu'il insiste sur ce qui fait la différence entre sa première explication et la seconde, où il dit construire un carré dont le côté est la diagonale, l'hypothénuse du triangle rectangle.
- Parfait, dit Sphalos, dessinons ce carré. Je l'appelle **cbb'c'**. Hum !



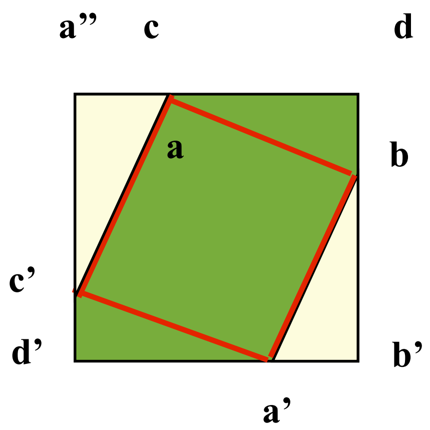
- Hum ! dit Céphaline.
- Oh ! Regarde, fit Kangourou. Si je fais tourner les triangle **abc** autour de **b** de sorte que **bc** devient **bb'**, il devient un triangle **bc'a'**, et les points **d**, **b** et **a'** sont alignés.
- Pourquoi cela ?
- Monsieur Pathogyre avait dit qu'on appelait angle la mesure de la rotation de **ab** vers **ac**. Comme **ab** et **ac** sont perpendiculaires, on dira que cet angle est droit.

L’angle en **b** du rectangle **abcd** est aussi un angle droit. L’angle en **b** du carré **cbb’c’** est aussi droit. Car si je lui enlève l’angle en **b** du triangle **abc** puis lui ajoute toujours en **b** l’angle du triangle **ba’c’** qui lui est égal, alors l’angle en **b** du triangle **aba’** sera droit.



Maintenant, rappelle-toi, on a rencontré une ligne BH comme ici **ab** qui était à la fois perpendiculaire à une ligne 4 et axe de symétrie de symétrie d’une figure de sorte qu’elle partageait la ligne 4 en deux parties égales qui étaient deux angles droits. Eh bien l’équivalent de cette ligne 4 est ici la ligne **dba’**.

- Mais il me semble qu’on peut également faire pivoter le triangle **abc** autour du point **c**, regarde, l’image **a”** de **a** dans ce pivotement est alignée avec **cd**. Alors on a le début **a”da’** d’un grand carré. Je le complète, j’appelle **d’** le quatrième sommet.



- Comme **cb** est la diagonale du rectangle **abcd**, les triangles **abc** et **dcb** sont égaux, également avec les triangles **ca''c'** et **a'bb'** par suite de nos rotations. Ce serait bien si le dernier triangle **d'b'c'** leur était égal.

- En tout cas, ils ont tous en commun d'avoir une hypothénuse de même longueur puisque, par construction, elles forment un carré dont tous les côtés sont évidemment égaux. Dans le grand carré, les côtés **a''d** et **d'a'** sont égaux, et comme **a''c** est égal à **b'a'** puisque ces côtés proviennent de la rotation du même triangle **abc**, les côtés **d'b'** et **cd** ou **ab** sont égaux. De la même façon, en considérant les côtés **a''d'** et **da'** du grand carré et leurs composants, le dernier côté **c'd'** est égal à **bd** qui est égal à **ac**. Tous les triangles ont donc tous leurs côtés équivalents égaux et sont donc bien égaux entre eux.

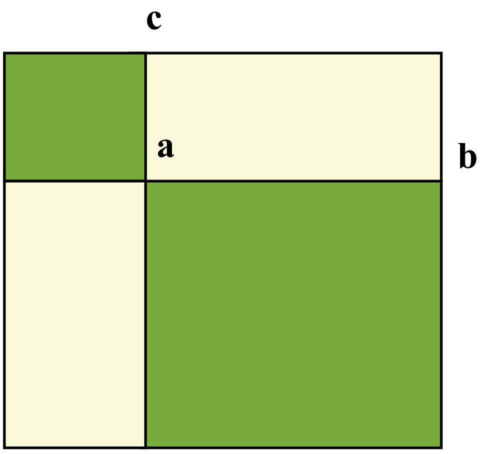
- Parfait ! Continuons comme Monsieur Pathogyre. Essayons d'évaluer les superficies, les aires de nos deux carrés.
- C'est facile pour le petit, son étendue est **bc**^{2}.
- C'est un petit peu la même chose pour le grand carré, c'est (**ab** + **ac**)^2 puisque **cd** est égal à **ab**, et que **a''c** est égal à **ac**.
- On est bien avancé ! Comment calculer (**ab** + **ac**)^2 ?
- Et si on essayait d'évaluer cette superficie en tenant compte de la décomposition du grand carré en éléments plus petits, le petit carré et les quatre triangles rectangles ?
- D'accord. Le petit carré a pour étendue **bc**^{2}, avons-nous dit. Chaque triangle étant la moitié d'un rectangle, deux triangles ont même superficie que le rectangle soit **ab** x **ac**, et donc la superficie des quatre triangles est 2 **ab** x **ac**. La superficie ou encore l'aire du grand carré est donc **bc**^{2} + 2 **ab** x **ac**.
- Oui, mais c'est une relation avec **ab**^{2} et **ac**^{2} qu'il nous faudrait obtenir !

Céphaline, Kangourou et Sphalos se regardèrent, inquiets. N'avaient-ils pas perdu leur temps à trouver et énoncer toutes ces observations ?

Une idée chemina dans la tête de Kangourou : **ab**^{2} est la superficie d'un carré de côté **ab**, et **ac**^{2} est la superficie d'un carré de côté **ac**. Il regarda à nouveau attentivement son dessin, et finit par dire à ses amis :

- Et si on essayait de décomposer le grand carré en éléments différents, où il y aurait un carré de côté **ab**, et un carré de côté **ac** ?

Ils s'attelèrent à la tâche, et obtinrent ceci, ô merveille !



- Regardez ! L'aire de notre grand carré est aussi la somme de l'aire du petit carré à gauche, $\mathbf{ac}^2$, du plus grand carré à droite $\mathbf{ab}^2$, et des deux rectangles soit 2 **ab** x **ac**.
- Alors, on a l'égalité

$$\mathbf{ab}^2 + \mathbf{ac}^2 + 2\ \mathbf{ab} \times \mathbf{ac} = \mathbf{bc}^2 + 2\ \mathbf{ab} \times \mathbf{ac}$$

et donc

$$\mathbf{ab}^2 + \mathbf{ac}^2 = \mathbf{bc}^2 \quad !$$

- Ouha! s'écrièrent-ils tous ensemble, on a gagné ! Vive Monsieur Pathogyre !

CHAPITRE IX

UNE DÉCOUVERTE SURPRENANTE

Pour fêter leurs succès, Céphaline, Kangourou et Sphalos décidèrent d'aller skier sur les pentes du Mont Circus avant d'aller faire quelques visites gastronomiques en des lieux maintenant célèbres.

Ils retournèrent bien sûr à la Pâtisserie riche en gâteaux de toutes les couleurs et de toutes les formes. Céphaline avait grand soif, elle commanda un grand chocolat. Kangourou choisit un gâteau qui avait la forme d'un cube parfait. Sphalos prit une pâtisserie nouvelle en forme de boule toute ronde.

Le dessus du gâteau de Kangourou avait bien sûr une forme carrée. Kangourou, la fourchette levée, hésitait.

- Qu'y a-t-il ? l'interrogea Sphalos.

Kangourou ne répondit pas sur le champ. Sur le glaçage de son gâteau, il traça une fine diagonale.

- Cette longueur de la diagonale m'inquiète. On a trouvé que si le côté du carré est 1, cette longueur vaut approximativement 1,414. C'est bizarre. N'existe-t-il pas une valeur exacte et accessible de cette longueur, avec un nombre fini de chiffres après la virgule ?
- Peut-être, dit Sphalos, va savoir ! Il aurait fallu continuer le processus d'approximation que nous avions engagé. Mais je ne me sens pas le courage de continuer si, par exemple, il faut fabriquer mille chiffres après la virgule avant de pouvoir d'arrêter.
- Moi, non plus. Goûtons ce gâteau.

Et Kangourou plongea hardimment sa fourchette dans la pâtisserie. Ce fut Céphaline qui intervint.

- Tu dis va savoir, va savoir, Sphalos. Quelque chose me dit qu'on doit parvenir à savoir.
- Avec ton quelque chose, on est bien avancé !
- Ce n'est pas parce que je suis une fille que tu dois te montrer si agressif ! Si un nombre a un nombre fini de chiffres après la virgule, par exemple simplement

3 chiffres, comme 1, 001, si tu le mulitplies ici par 1000, tu obtiens 1001. Alors si tu utilises un instrument de mesure adapté, grossissant par rapport à un autre instrument plus grossier, tu vas pouvoir mesurer exactement 1001.

- D'accord, mais que veux-tu dire à travers cet exemple ?
- Je veux dire que si le nombre de chiffres après la virgule est fini, comme pour 1001 divisé par 1000 qui est égal à 1,001, on doit pouvoir l'écrire comme un rapport de deux nombres ordinaires, qu'on appelle des nombres entiers, alors que 1001 divisé par 1000 est appelé un nombre fractionnaire.
- Soit, je veux bien. Alors espérons que le nombre qui a pour carrré 2 est le rapport de deux nombres que tu dis entiers a et b. Et tu en déduis quoi ?
- Je ne sais pas encore, mais en tout cas, pour faciliter les choses, on va faire en sorte que ces nombres a et b soient les plus petits possibles. Ça nous fera faire éventuellement moins de travail. Par exemple, si $a = 2\ n$ et si $b = 2\ m$, on remplacera le couple a et b par le couple de nombres plus petits n et m.
- D'accord. Donc ils ne peuvent avoir 2 en commun, autrement dit si l'un est pair, et alors être un multiple de 2, l'autre doit être impair, c'est-à-dire ne peut pas être un multiple de 2.
- Exactement. Ou bien $a = 2n$, alors $b = 2m + 1$, ou bien l'inverse, si $a = 2n + 1$, alors $b = 2m$.
- Bon, alors disons par exemple que 2 égale $2n$ au carré divisé par $(2m + 1)$ au carré. Et après ?
- Attends, je reprends d'abord ce que tu viens de me dire en le détaillant un peu : 2 égale $2n$ x $2n$ divisé par $(2m+ 1)^2$ ou encore 2 x $(2m + 1)^2 = 2n$ x $2n$, et donc $(2m + 1)^2 = 2\ n^2$.

Céphaline s'était arrêtée de parler et de boire. Kangourou et Sphalos restaient silencieux; leurs gâteaux, à moitié entamés, désarçonnés par cet abandon de leurs maîtres, inquiets de ne plus les rendre heureux par le plaisir qu'ils leurs apportaient, les regardaient avec tristesse. Sphalos, Kangourou et Céphaline ne savaient plus que faire, que dire.

- Attendez! dit soudain Kangourou. Vous rappelez-vous que nous avons calculé de plusieurs façons l'étendue d'un carré de côté **ab** + **ac** ? C'est bien sûr (**ab** + **ac**)^2 mais aussi **ab**^{2} + **ac**^{2} + 2 **ab** x **ac** n'est-ce-pas ? Alors $(2m + 1)$ au carré est égal à $2m$ x $2m$ + 1 x 1 + 2 x $2m$ x 1, soit $4m^2 + 1 + 4m$ qui est un nombre impair. Mais il ne peut être égal à 2 n^2 qui est un nombre pair ! Donc ce que tu as dit, à savoir que 2 égale $2n$ au carré divisé par $(2m + 1)$ au carré, est impossible !

- Alors ça, c'est curieux, inattendu ! Mais peut-être l'autre possibilité $a = 2n + 1$, $b = 2m$ est-elle plus raisonnable ?
- Voyons, cela donne $2 = (2n + 1)^2$ divisé par $(2m)^2$, ou encore $4n^2 + 1 + 4n$, qui est un nombre impair, est égal 2 x $(2m)^2$ qui est un nombre pair : c'est encore impossible !

Céphaline, Kangourou et Sphalos n'en revenaient pas. 2, s'ils ne s'étaient pas trompés dans leur suite de raisonnements, ne pouvait être égal au carré du rapport de deux nombres entiers. Ou encore, aussi grandement précise soit la règle qu'ils utiliseraient pour faire leurs mesures, elle ne parviendrait pas à leur donner la mesure exacte de la diagonale du carré de côté 1. Qu'est-ce que ce nombre bizarre, un peu fou peut-être, que l'on ne parvient à saisir que par la valeur de son carré ? Ils étaient assez perplexes.

Pour se remettre de leurs émotions, ils terminèrent leur goûter avec avidité. Un mystérieux Père Noël qui, curieusement, passait par là, le sourire en coin, leur glissa à l'oreille, «Bravo les enfants, allez voir mon cousin !». Le temps de se retourner, Père Noël avait disparu.

CHAPITRE X

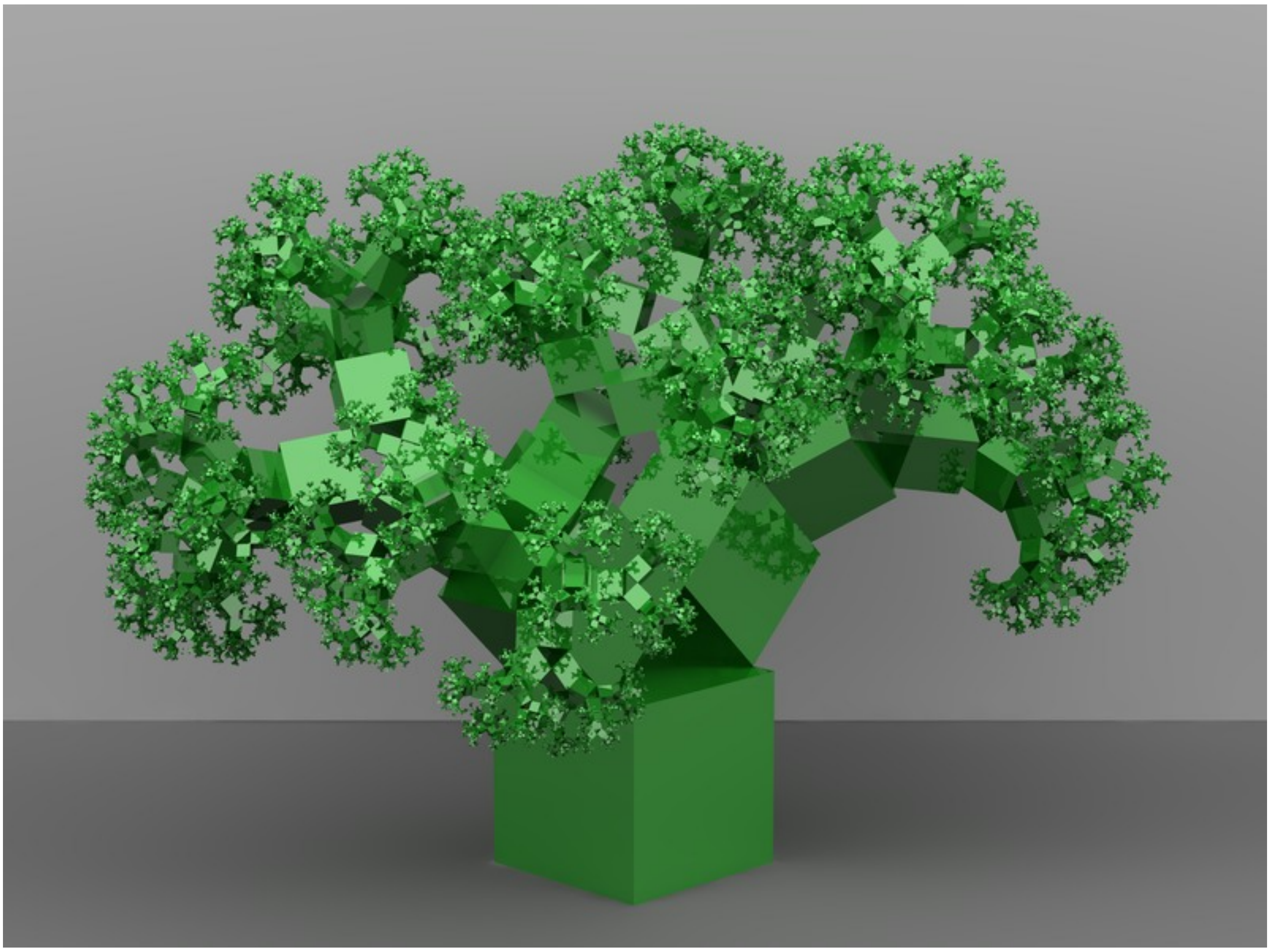
LE DISCIPLE DE MONSIEUR PATHOGYRE

Il faisait déjà bien sombre quand ils arrivèrent au chalet. Il était trop tard pour aller voir Monsieur Zoroastre Pathogyre. Son prénom, avait-il raconté, lui avait été donné par les devins qui de lui voulaient faire un disciple. Selon ces devins, le prénom fixait et révélait le destin. N'était-il pas devenu en effet, lui, Zoroastre, un astrologue, contemplant jour et nuit les émanations volantes qui, les nuits, illuminaient le ciel, découvrant dans ses rêves les spectacles parfois grandioses qui enflammaient l'univers ? N'avait-il pas donné à ses parcelles de jardin, en souvenir de ses heureux voyages dans l'éther sidéral, le nom fabuleux de ces astres dont il avait fait des amis ?

Mais c'est en concevant son jardin, en cherchant à lui apporter toutes les beautés qui le rendraient propice à l'hommage des dieux, qu'il avait découvert les secrets de la diagonale et ceux du nombre à la représentation sans fin. N'était-ce pas la récompense que les dieux reconnaissants lui avait donnée ?

- Mon jardin était devenu célèbre, et beaucoup, qui espéraient me voir, se demandaient pourquoi et comment il avait été conçu. Trop souvent accaparé par mes observations, plongé dans mes rêves, je ne pouvais leur répondre. Surtout, je ne voulais leur répondre. Le savoir ne doit se transmettre qu'à de sages mains, qui sauront en prendre soin, le conserver précieusement, l'enrichir dans la beauté, en faire l'usage pour le seul bien des hommes. Un jour, dans mon pays, la Babylonie comme vous le savez, vint un habitant de vos contrées lointaines, parcourant les pays à la recherche, disait-il, de la connaissance. Je fus curieux de recevoir cet homme rare. Il était né en Grèce, dans une île fameuse par ses vins, Samos, et comme pour moi, les dieux avaient laissé leur empreinte dans son nom. Alors je me fis un devoir de lui révéler mes secrets, pour qu'il les porte à ceux qu'ils devaient rencontrer, façonner, et juger dignes de recevoir ces secrets. Mais vous qui avez su écouter, penser, chercher, imaginer, découvrir, vous qui savez transposer, casser les codes, briser les secrets, devinerez-vous qui fut ce disciple renommé ?

- PYTHAGORE ! s'écrièrent-ils tous ensemble.



Jos Leys

NOTES «HISTORIQUES»

La lecture de ce texte suppose d'avoir déjà fait connaissance avec nos héros (cf Le Kangourou merveilleux, Les Délicieuses Glissades de Sphalos) que l'on pourra présenter en avant-propos.

1) Dans les temps anciens, dès l'âge de 9 ans, les enfants apprenaient à résoudre des problèmes posés à propos de bassins qui se remplissaient, de trains qui se croisaient.

On apprenait l'art de raisonner.

L'exercice est indispensable pour la formation de l'esprit. Certaines disciplines, comme la mathématique en particulier, offre des possibilités fort riches de le pratiquer.

C'est à cette fin qu'a été écrit ce conte. Dès l'âge de 9 ans sans doute, l'enfant peut en tirer profit, par un mode d'emploi adapté.

2) C'est d'abord à l'enseignant, au maître qu'il revient, une fois ou deux par semaine, de lire devant ses élèves, se servant parfois du tableau, un chapitre de ce texte. Conformément à mon choix symbolique qui n'est qu'un clin d'oeil à l'histoire, le conte a dix chapitres. La lecture par le maître s'étend donc sur 10 semaines au moins, disons un trimestre.

Naturellement, le maître recommandera à son auditoire la relecture chez soi du chapitre découvert à chaque nouvelle occasion. Il pourra faire relire en sa présence telle ou telle partie du conte. Il pourra, ensuite, interroger ce même auditoire pour savoir ce que celui-ci a retenu.

3) Le maître pourra prolonger l'exercice en incitant l'auditoire à écrire une suite élémentaire du conte : concevoir la notion de triangle sur un petit astre en forme de boule, un peu semblable à celui que l'on voit sur les aquarelles ornant l'ouvrage de Saint-Exupéry, *Le Petit Prince*. Faire voir un triangle équilatéral dont tous les angles sont droits, et faire comprendre ainsi l'impossibilité d'étendre sur une surface sphérique le théorème de Pythagore tel qu'il se présente dans le plan.

Essayer de voir si on peut étendre le dit théorème à un cube. Placer un cube intérieurement à un cube donné et retrouver l'expression de $(a + b)^3$, et montrer que la somme de deux cubes identiques ne peut être un cube (rattacher au problème égyptien de la duplication du cube). On peut bien sûr encore généraliser.

4) Renvoyer sur wikipédia pour des études complémentaires.

On trouvera sur les sites correspondants de nombreuses références historiques. À ce sujet, cette remarque : il existe deux formes d'histoire. Dans la première, l'historien se contente simplement, aussi complexe que soit ce simplement, de narrer les faits. Dans la seconde, l'historien non seulement se plie à l'exercice précédent, mais de plus, et surtout, s'efforce de reconstituer dans l'esprit des protagonistes la genèse des faits, des processus, et de les expliquer. Le travail profond de l'historien est là, il est malheureusement très rare.

C'est bien dans cette seconde optique que ce conte a été écrit. On voudrait inciter l'élève à reconstituer en lui les démarches de l'esprit qui furent peut-être celles des pionniers, des premiers et authentiques découvreurs.

L'élève, quand il rencontre une difficulté, ne pourra que tirer bénéfice de l'exemple donné par ses héros qui, par le divertissement, chassent les soucis bloquant le travail de la pensée, permettant maintenant à celle-ci de chercher et d'apporter des réponses aux questions nouvelles.

5) Il convient de faire valoir la généralité quand elle existe des démarches de l'esprit, notamment :

rechercher au départ la situation la plus simple possible, l'étudier, puis voir comment l'étendre à des situations présentant moins de contraintes, plus générales;

bien définir les procédures d'étude dans les cas élémentaires, et essayer de voir comment les utiliser dans l'examen des situations plus générales.

Ce sont là des trivialités pour le professionnel, mais sans doute pas pour l'enfant qui pénètre dans cette formation pour la première fois.

6) La construction du conte est quelque peu cyclique : les premier et dernier chapitres font allusion à la théorie des groupes appliquée au codage des messages, se contentant d'introduire deux mots basiques du vocabulaire de cette théorie.

Le chapitre II insiste sur l'importance des deux mouvements fondamentaux : la translation (qui peut être également conçue comme une dilatation) et la rotation. On sait que la vie est mouvement, et que, selon le théorème d'Aristote-Liouville, dans n'importe quel espace, tout mouvement local est le composé d'une translation locale et d'une rotation locale. Le statique n'étant qu'un mouvement localement figé dans le temps, c'est la vision et la représentation animées du monde qu'il convient de mettre en évidence pour mieux décrire et comprendre celui-ci.

À Gometz-le-Chatel, le 24 Janvier 2(01)4

Table des matières

Notes Historiques :

1. Les délicieuses Glissades de Sphalos
2. Le Kangourou Merveilleux
3. Le Jardin Enchanté