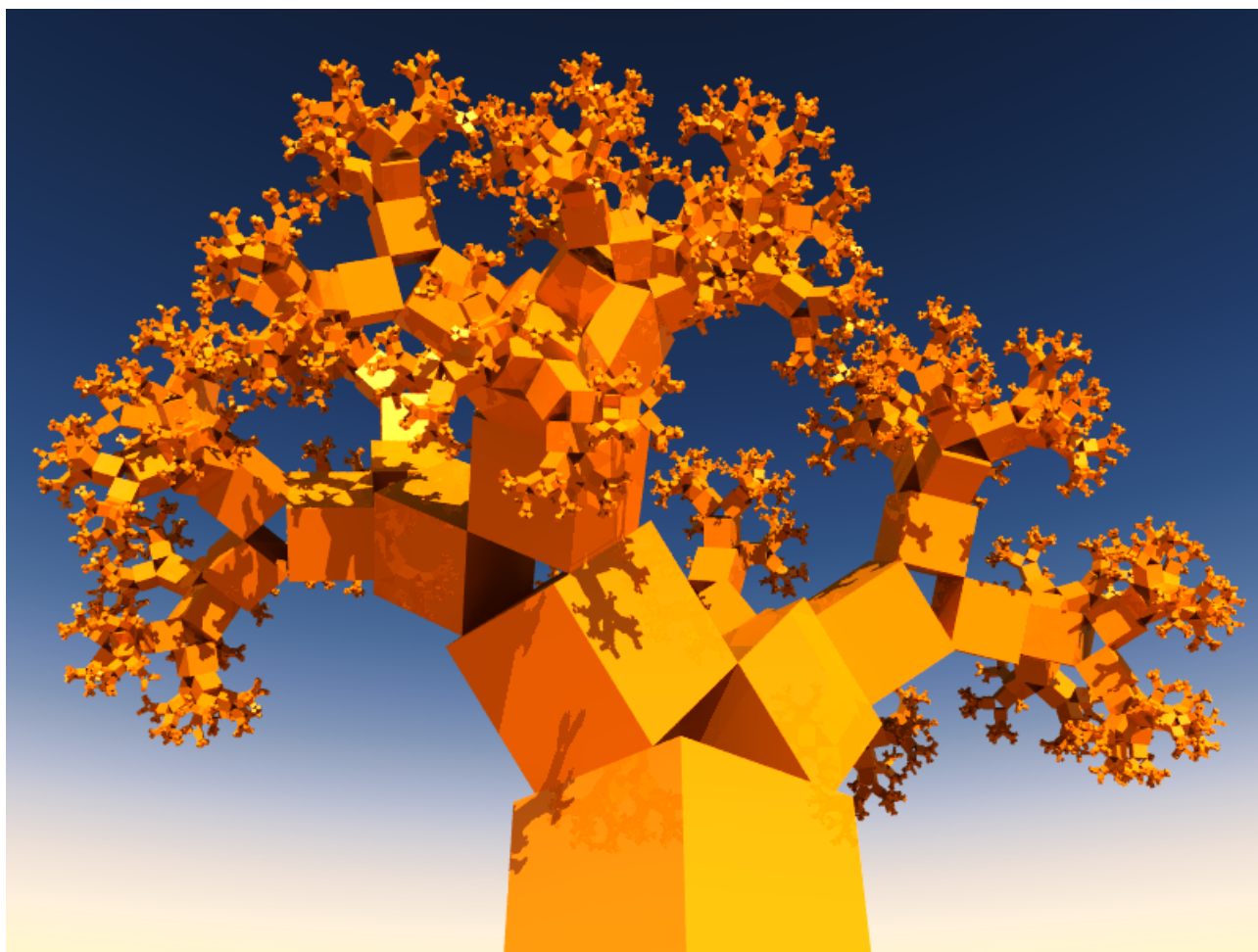


LE JARDIN ENCHANTÉ

Claude-Paul BRUTER



Jos Leys

CHAPITRE I

KANGOUROU ET SPHALOS RENCONTRENT

PATHOGYRE

Les gros flocons tombaient en silence. Sous le ciel encore uniformément peint en léger gris, une douce ouate blanche sans ride recouvrait maintenant la montagne. Kangourou et Sphalos se regardèrent, ils échangèrent un sourire. Sans un mot, ils chaussèrent leurs skis. En sortant, déjà, quelques joyeux rayons éclairaient le paysage.

Taillée dans la forêt, encore immaculée, ils suivaient une piste bordée de sapins aristocratiques, élégamment élancés vers le ciel. Immobiles, leurs branches chargées de neige, étincelantes sous le soleil, penchaient avec déférence, et saluaient nos deux amis.

Au sortir d'un virage, la surprise fut totale. Sur la neige étaient tracées des figures géométriques simples, des gravures parfaites sur un matériau léger, aux lignes peu profondes révélées par la lumière. On voyait d'abord un carré, plus loin un rectangle, et plus loin encore, des triangles possédant tous un angle droit, et plus loin encore ...

assis dans la neige, un vieux monsieur vêtu de rouge et à la barbe blanche, une grande barbe, une très grande barbe. Le Père Noël ?

- Êtes-vous le Père Noël, monsieur, est-ce vous qui avez fait ces dessins ?
- Non, les enfants, je ne suis pas le Père Noël, mais son cousin en quelque sorte.
- Son cousin ? Je ne savais pas que le Père Noël avait un cousin ! C'est vrai que vous êtes habillé un peu comme lui, mais vous ne portez pas de hotte. Vous habitez chez lui, où il y a plein de cadeaux ?
- Oh pas très loin de chez lui, il a tellement de cadeaux, le Père Noël, qu'on ne peut plus trouver la place de poser un lit ! Savez-vous compter les enfants ?

- Bien sûr, monsieur, on sait même faire des additions et des multiplications. Mais comment vous appelez-vous ?
- Je m'appelle Zoroastre Pathogyre, on dit que je suis un supermutant, c'est ce qui m'a permis de devenir vieux, très vieux, bien plus vieux même que le Père Noël!
- Plus vieux que le Père Noël ! Ce n'est pas possible, quel âge avez-vous, et où êtes-vous né ?
- Je suis né en Babylonie, il y a seulement cinq mille ans.
- Hou là-là ! Cinq mille, oui, c'est sans doute très beaucoup. Et que faisiez-vous en Bobalynie, des jouets pour le Père Noël?
- Non, pas des jouets, je me contentais de les décorer, et puis je cultivais mon carré de terre, mon jardin. On ne dit pas Bobalynie, mais Babylonie.
- Ce ne serait pas par hasard la Papylonie, le pays où tout le monde devient grand-père, et même un très très grand grand-père, comme vous ?
- Oh, les coquins ! Savez-vous que les grands-pères sont aussi restés des enfants, comme vous ? Mais je vois que vous aimez jouer avec les lettres, échanger leur place dans un même mot, remplacer un lettre par une autre qui sonne un peu de la même façon.
- Mais oui, monsieur Pathogyre, nous aimons beaucoup jouer avec les lettres. Comme ça, quand nous nous échangeons des messages, nous sommes les seuls à les comprendre, et pas nos petites amies ! Sauf Céphaline, bien entendu !
- Alors comment faites-vous pour savoir que Babylonie et Bobalynie désignent le même pays ?
- Eh bien voilà, mais il ne faut le répéter à personne, promis ? C'est très simple. Dans chaque mot que nous voulons échanger, nous modifions parfois la place de ces lettres qu'on appelle des voyelles. Quand il n'y a qu'une voyelle, bien sûr, on ne peut rien changer. Quand le mot a deux voyelles, on ne change rien du tout non plus, car sinon on devinerait vite que nous échangeons un message que nous voulons garder secret. Quand un mot a plus de trois voyelles, on change la place des trois premières selon des règles bien à nous.
- Et quelles sont ces règles, les enfants ?

Kangourou et Sphalos se regardèrent, les yeux de l'un interrogeant les yeux de l'autre. Fallait-il avoir confiance dans ce vieux monsieur qui se disait cousin du Père Noël ? Et si ce n'était pas vrai ?

- Ces règles sont très compliquées, c'est un secret.

Le vieux monsieur se gratta la barbe. Il fallait à coup sûr respecter le secret. Il n'aurait pas été convenable de chercher à en savoir davantage. Il fallait d'abord mettre en confiance nos amis.

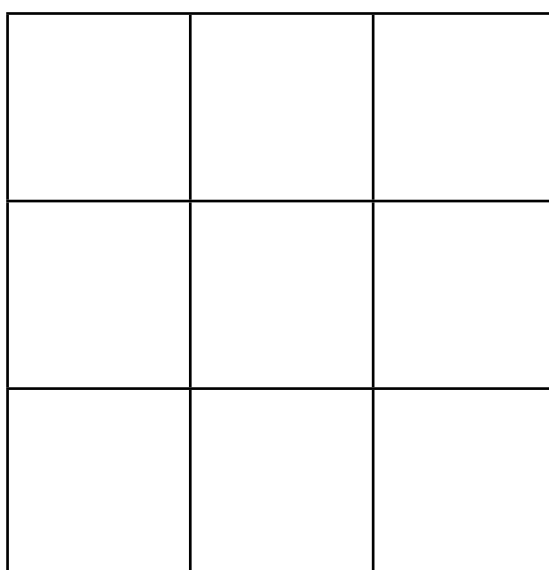
- Je vous comprends, leur dit-il. Je vais plutôt vous parler de mes secrets, à moi Zoroastre Pathogyre.

CHAPITRE II

LE JARDIN DE MONSIEUR PATHOGYRE

- Je me souviens de mon premier jardin. Oh, ces parfums, et qu'il était beau ! Il avait la forme simple et équilibrée d'un carré.

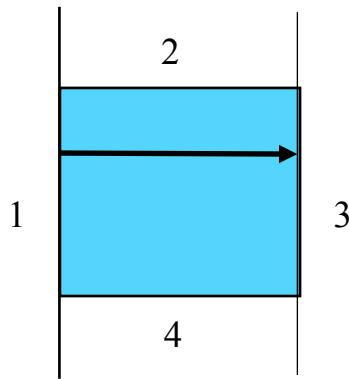
Je l'avais divisé en neuf carrés égaux, plus petits bien sûr. Je le dessine ici sur la neige avec vous.



- Mais, monsieur, comment avez-vous fait pour fabriquer les petits carrés, de sorte qu'ils soient tous égaux entre eux ?
- Que voilà une bonne question ! Comme la réponse est longue, je ne vous la donnerai pas entièrement aujourd'hui. Regardons ensemble, d'abord comment est fait un carré.

Kangourou et Sphalos se regardèrent à nouveau en hochant la tête. Ils n'osaient pas interrompre le vieux monsieur.

- Il a quatre côtés, tous de même longueur, continua-t-il. Je vais, en tournant, les numéroter, un , deux , trois, et quatre.

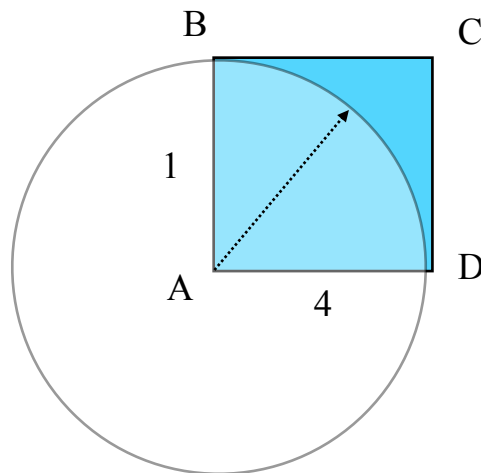


Vous voyez que, si je prends par exemple le côté 1, je peux le faire glisser sur le côté 3, et que les deux lignes, la ligne 1 qui porte le côté 1, et la ligne 3 qui porte le côté 3, semblent ne jamais pouvoir se rencontrer. On dit que les deux lignes et les deux côtés 1 et 3 sont parallèles.

Et que pensez-vous des deux autres côtés 2 et 4 ?

- Ils sont parallèles bien sûr !

- Bravo ! Mais pour amener le côté 4 sur le côté 1, il faut le faire tourner, on ne peut pas le faire glisser. La longueur du chemin sur le cercle entre D et B s'appelle l'angle entre AD et BD.



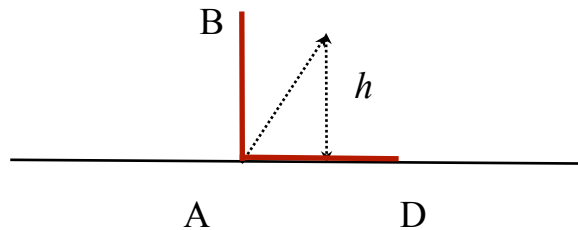
Nous avons rencontré, mouvements fondamentaux, glisser et tourner. Il est vrai que, pour tous deux, Kangourou et Sphalos, ces mouvements n'ont pas de secret. D'ailleurs, amusez-vous simplement à faire bouger vos doigts, vos mains. Regardez-les bien. Font-ils d'autres mouvements que des mélanges de tourner et de glisser ?

- Non, mais nos doigts tournent moins que le côté 4 quand il vient rejoindre le côté 1.

- Vrai ! La Nature nous a fait comme ça. L'essentiel est que nous nous débrouillions bien avec nos dix doigts et nos deux mains. On va appeler A le point où le côté 1 rencontre le côté 4, puis, en tournant, B le point où le côté 2 rencontre le côté 1, en

tournant encore C le point où le côté 2 rencontre le côté 3, et enfin D le point où les côtés 4 et 1 se touchent.

Je fais tourner le côté 4, c'est-à-dire le côté AD, autour du point A. Regardez la position de D : lorsqu'il est sur la ligne 4, sa distance h à cette ligne est nulle. Au fur et à mesure que le côté AD tourne, l'extrémité mobile D décrit une portion de cercle et sa distance à la ligne 4 augmente. Elle est la plus grande possible quand D arrive en B.



On dit que le côté 1, AB, est perpendiculaire ou orthogonal au côté 4, AD.

Eh voilà ! Ce qui caractérise le dessin appelé un carré est le fait qu'il a quatre côtés d'égale longueur, que les couples de côtés qui se suivent sont perpendiculaires.

- Mais monsieur, nous savons tout cela ! s'écrièrent en chœur Kangourou et Sphalos.
- Oh, mais bravo, que l'on est donc savant aujourd'hui ! Mais je parie que vous ne sauriez pas écrire dans la langue des amis de mon enfance, ces quatre mots glisser, tourner, parallèle, perpendiculaire.
- Non bien sûr, répondirent Kangourou et Sphalos, mais comment faisiez-vous ?
- Oh, de manière très simple. Aux premiers temps de l'écriture, souvent un petit dessin approximatif sur du bois ou sur une pierre tendre permettait de comprendre la signification du message. Alors entre nous, mais entre nous seulement, on avait établi le code suivant :

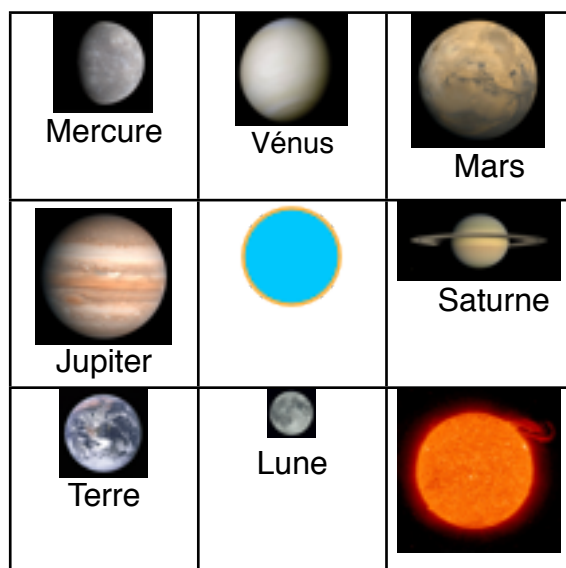
cette gravure, la flèche, \longrightarrow signifiait glisser,
 la gravure d'un rond, du cercle, \bigcirc signifiait tourner,
 la gravure de deux petits traits parallèles // signifiait parallèle,
 et cette gravure, \perp signifiait perpendiculaire.

Bien sûr, on ne tenait pas de grands discours avec ces seuls quatre signes, on en avait fabriqué quelques autres, et on s'amusait bien !

Alors au milieu du carré, j'avais installé une vasque taillée dans une pierre teintée en jaune. Elle recueillait l'eau multicolore jaillissant de son centre, de sorte que les milliers de gouttelettes qui s'élevaient dans le ciel dessinaient à leur tour la forme de la vasque. C'était près de ce jet musical que je m'installais pour contempler le ciel.

J'avais appris à regarder les étoiles et les planètes qui nous entouraient, et j'avais donné le nom de l'un de nos astres proches à chacun des petits carrés que j'avais dessinés.

De mon temps, on ne pouvait bien voir que les cinq planètes que vous nommez aujourd'hui Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne. J'ajoutais, comme d'autres, le Soleil et la Lune, et même la Terre sur laquelle nous nous trouvons, puisque nous sommes tous dans le même ciel. Je plaçais la Lune entre le Soleil et nous. Voilà, je vous fais le dessin du grand carré avec, dans chacun des petits carrés, une image de l'astre qui lui donne son nom.



Je pouvais ainsi raconter, comme vous qui pouvez le faire, Kangourou et Sphalos merveilleux, que je me promenais dans le ciel, allant de Mercure à Jupiter, ou plus simplement de la Terre à la Lune. Enivré par les parfums des plantes aromatiques que j'élevais, je n'avais pas besoin de fusées pour aller explorer ces astres. Je rêvais, et les voyais porteurs d'immenses glaciers brillants, de lacs multicolores scintillants, enveloppés de sombres brouillards impénétrables, abritant des monstres terrifiants, offrant à la vue des myriades de fleurs différentes, ou même parfois sonores comme d'étranges instruments de musique, je restais aveuglé par la

braise ardente du soleil, d'où s'échappaient d'immenses filets magnétiques incandescents. M'accompagneriez-vous dans ces voyages ?

- Oh oui ! s'écrièrent d'une seule voix, Kangourou et Sphalos. Quand partons-nous ?

CHAPITRE III

GROS-JEAN COMME DEVANT

- Holà mes amis ! De si longs voyages demandent une solide préparation. Ne faut-il pas que les parfums vous enivrent avant de pouvoir entreprendre un tel parcours dans l'univers ? Il convient donc à votre tour de créer un jardin enchanteur analogue à celui de mon enfance, d'où vous pourrez vous libérer des chaînes de la pesanteur terrestre. Je vous aiderai autant que je le pourrai, j'essaierai de répondre à toutes vos questions.
- Merci, monsieur l'Enchanteur, répondirent nos amis, tout en joie à l'idée de créer ce jardin.

Kangourou et Sphalos se consultèrent. Il leur fallait construire un jardin de forme carrée. Mais comment faire pour dessiner un carré ? Ils restèrent silencieux, s'interrogeant mutuellement du regard, chacun espérant que l'autre apporterait la solution à cette question. Sans aucunement réfléchir à aux mouvements naturels qu'ils faisaient, Kangourou tournait en rond, comme sur un cercle, Sphalos avançait et reculait, comme sur une ligne. Ne sachant comment procéder, Kangourou et Sphalos décidèrent d'aller se changer les idées et partirent se promener. Peut-être, au cours de leur promenade, à travers bois, une bonne idée émergerait-elle ?

Ce n'est que le lendemain que, soudain, jaillirent dans leur esprit les images des dessins que l'Enchanteur leur avait montrés, lorsqu'il leur faisait voir les premières propriétés du carré : il avait tracé le côté AD, puis l'avait fait tourner de sa position horizontale initiale jusqu'à la position verticale où le point D venait se confondre avec B.

Kangourou et Sphalos se dirent qu'ils pouvaient choisir un point A, et grâce au mouvement de Sphalos, le faire glisser jusqu'en un point D le long d'une ligne qu'ils nommeraient 4. C'est donc ce qu'ils firent :



Ils avaient ainsi construit un premier côté d'un carré.

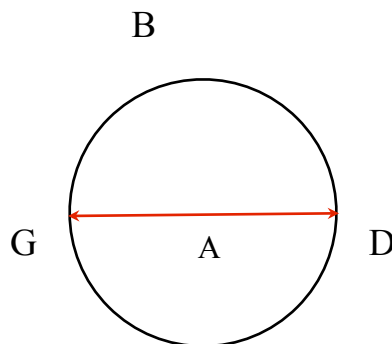
Sphalos fit remarquer à Kangourou qu'il était parti du point A sur sa droite, mais qu'il aurait aussi bien pu se diriger sur la gauche, et atteindre un point G de sorte que D et G sont à même distance de A !

Ils firent alors un dessin qui montrait les deux possibilités :



Mais ensuite, comment obtenir le fameux point B ? Ils savaient, grâce au mouvement tournant circulaire de Kangourou, sur quelle courbe B était positionné, sur le cercle centré en A et passant par D.

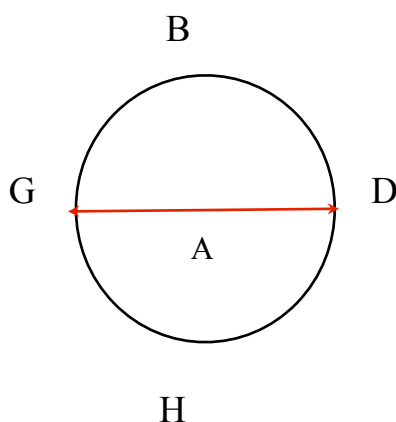
Comme G était à même distance de A que D, ce cercle devait passer par G. C'est bien ce qu'ils observèrent en faisant le dessin :



Cependant, à son tour, Kangourou dit à Sphalos :

- Dis, Sphalos, tu as changé de direction en allant de A vers G au lieu de A vers D, mais moi aussi, je peux tourner en deux sens opposés autour de A. Au lieu d'aller vers B directement en montant, je peux aussi, partant de D, d'abord descendre puis remonter vers B en passant par G !
- Tu as raison, mais oui. Et comme B est le point haut du cercle le plus éloigné de l'horizontale qui porte les points GAD, tu vas passer en bas par un point qui sera également le plus éloigné de cette horizontale.

- Il faut bien lui donner un nom à ce point bas. Appelons-le H comme haut, puisque celui qui est en haut a été appelé B comme bas !
- Excellent. J'inscris H sur le dessin.



Mais, Kangourou, on peut grimper de la même façon jusqu'au point B, soit à partir de G soit à partir de D, lesquels G et D sont sur la même ligne et à même distance de A. B est donc sur le demi-cercle du haut à même distance de G et de D. De la même façon, sur le demi-cercle du bas, H doit être à la même distance de G et de D.

Cette remarque fit réfléchir Kangourou.

- Oui, oui. Si donc on joint B et H par une ligne, et si on replie le cercle selon cette ligne, G viendra en D, les deux demi-cercles vont se confondre. Et comme A est à même distance de G et de D, A se trouvera sur cette ligne BH qui est perpendiculaire à la ligne GD, puisqu'on a dit avec l'Enchanteur que AB était perpendiculaire à AD. Je crois qu'on appelle BH, un axe de symétrie de la figure.
- Tout cela ne nous dit pas comment véritablement obtenir le point B, conclut Sphalos.
- Oui, pour le moment, nous sommes Gros-Jean comme devant. Et si on allait plutôt faire une partie de ping-pong ?

CHAPITRE IV

LA PARTIE DE PING-PONG

De part et d'autre de la grande table bleue, la petite balle blanche volait.

Contre la raquette de Kangourou, ses claquements étaient secs, elle filait comme la flèche, lancée par le revers rapide de Kangourou qui pivotait sur lui-même.

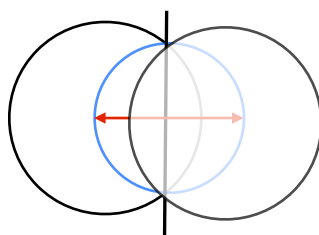
Très rapidement Sphalos glissait aussi vite que la flèche, et reprenant la sphère cellulosique, lui imprimait un mouvement de rotation donnant à la trajectoire de la balle cette allure courbée d'une portion de cercle.

Chacun avait son style, l'un privilégiant le cercle puis la flèche, l'autre privilégiant la flèche puis le cercle. Ils formaient en quelque sorte un couple parfaitement symétrique par rapport au filet rouge qui séparait la table en deux.

Commençant à avoir bien chaud, ils s'arrêtèrent un moment pour échanger leur place, puis recommencèrent leur jeu. Seulement quelques instants plus tard, n'en pouvant plus, essouffés, ils s'assirent pour boire un grand verre d'eau désaltérant et réparateur, commentant leurs exploits.

Soudain, Kangourou dit à Sphalos :

- Tu sais à quoi m'a fait penser cette partie de ping-pong ? Au dernier dessin que nous avons fait quand nous cherchions à fabriquer notre carré. Le cercle était comme notre table, j'étais H par exemple et alors tu étais B, et GA était comme le filet.
- Oui, dit Sphalos. Et comme B et H sont à la même distance de D, ils sont situés sur un cercle de centre D, et comme B et H sont à la même distance de G, ils sont situés sur un cercle de centre G. Autrement dit, ces deux cercles, respectivement de centre D et G, se coupent en B et H. En construisant nos cercles, on obtient nos points cherchés B et H !



- Ouah ! Astucieux, tu n'es pas Grec, fils d'Ulysse, pour rien. Mais, mais comment construire nos cercles puisque nous ne connaissons toujours pas ces points B et H ?
- Tu as raison. Mais attends, attends. Regardons notre figure. Puisque la ligne verticale qui passe par B et H est un axe de symétrie de la figure, tous les points de cette ligne sont à égale distance de D et G. Et donc si je prends deux cercles de même rayon, l'un centré en D, le second centré en G, s'ils se coupent, leurs point d'intersections étant équidistants de D et de G se trouvent sur cet axe de symétrie, qui est perpendiculaire en A à AD.
- Tu as trouvé ! Il suffit maintenant de prendre l'intersection, avec le cercle centré en A et passant par D, de cette ligne qui joint par les points d'intersection de tes deux cercles, c'est le point B, ou d'ailleurs le point H.

Tout heureux de leur découverte, Kangourou et Sphalos s'en vinrent trouver Monsieur Pathogyre, l'Enchanteur comme ils l'appelaient entre eux.

- Nous savons dessiner le carré ! lui dirent-ils joyeusement.
- Comment donc avez-vous fait ?
- Eh bien voilà. Nous nous donnons un côté AD, puis nous allons construire un autre côté du carré qui a un point commun avec AD, par exemple le côté AB. Pour cela, nous dessinons, sur la ligne qui porte AD, le point G symétrique de D par rapport à A. Puis nous dessinons deux cercles de même rayon assez grand, l'un centré en D, l'autre en G. La ligne de leur intersection est perpendiculaire à AD en A. Son intersection avec le cercle centré en A et passant par D donne le point B cherché. Une fois qu'on a B, on construit facilement C, situé à l'intersection, par exemple, des cercles de centres D et B et de rayon AD.
- Félicitations ! Mais savez-vous qu'on aurait pu procéder de manière légèrement différente ?
- Comment cela ?
- Il me faut d'abord vous faire part d'un secret. Je vous le donnerai une fois prochaine, car je dois rentrer, aller arroser les fleurs de mon jardin d'aujourd'hui. Au revoir mes amis.

Un peu déçus par ce départ rapide, Kangourou et Sphalos quittèrent Monsieur Pathogyre, et s'en furent voir leur amie préférée Céphaline pour lui raconter leur trouvaille.

Ce fut moins la manière dont on pouvait construire un carré que l'usage que l'on pouvait en faire qui intéressa Céphaline. Un jardin ? Oui, bien sûr. C'est à son usage décoratif que pensait davantage Céphaline.

- Si vous faites des carrés de couleurs, en bois d'essences diverses ou en céramique teintée, vous pouvez joliment carrelé votre sol ou vos murs. D'ailleurs, vous pouvez déformer votre carré en n'importe quel quadrilatère, et quand même faire votre carrelage avec de tels éléments.
- Devons-nous te croire ? dit Kangourou. Pour ma part, je pense davantage au carré de chocolat comme emploi utile de la forme carrée !
- Tu n'es qu'un gourmand, et même un glouton, lui répondit Céphaline, tu ne penses qu'à manger !

Sphalos vient à la rescousse de Kangourou :

- Pourtant en empilant les carrés de chocolat, on peut faire des constructions amusantes, dit-il, et non moins délicieuses. Regarde !

Il sortit de son sac une boîte carrée, l'ouvrit et montra ce curieux objet :



- Oh! Cela me fait penser aux pyramides en gradins construites par les Mexicains et les Egyptiens, comme celle de Djéser à Saqqarah. Tu me l'offres ce chocolat ?



CHAPITRE V

LE SECRET DE MONSIEUR PATHOGYRE

Cela faisait plusieurs jours qu'ils n'avaient pas vu Monsieur Pathogyre. Et s'il était malade ? Il était fort âgé, et s'il disparaissait sans avoir livré son secret ?

Ils repartirent dans la forêt, aujourd'hui ensoleillée, et allèrent à l'endroit même où ils l'avaient rencontré la première fois. Monsieur Pathogyre, souriant, les attendait.

- Je savais, leur dit-il, que vous viendriez. Vous voulez connaître mon secret, n'est-ce pas ? Alors je vais tout vous dire. Mais je vous préviens, ce sera long.

D'abord, sachez que mon premier jardin carré, celui dont je vous ai parlé la dernière fois que nous nous sommes vus, était petit.

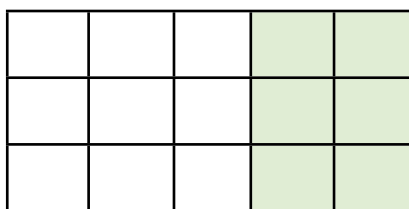
Vous vous rappelez que je l'avais divisé en carrés plus petits. Je n'avais qu'à faire qu'un seul de mes grands pas pour passer d'un petit carré au suivant. Je dénommai l'étendue de ce petit carré, qu'appelle aussi sa superficie ou son aire, par l'expression « pas carré ». Comme la longueur de ce pas est très voisine de ce que vous nommez 1 mètre, vous diriez que l'étendue du petit carré est de « un mètre carré ». L'étendue de deux petits carrés était donc de deux « pas carrés », vous diriez de deux « mètres carrés ».

Pour construire mon jardin, on avait en quelque sorte empilé sur trois hauteurs, trois petits carrés. Il y avait donc trois fois trois petits carrés, soit 9 petits carrés, et donc l'étendue de mon jardin était de 9 mètres carrés.

Comme 9 égale trois fois trois, on écrit aussi $9 = 3^2$ pour montrer que 3 apparaît deux fois pour obtenir 9, qui est alors appelé le carré de 3. L'écriture 3^3 signifie que l'on fait trois fois le produit de 3 avec lui-même, et donc $3^3 = 27$.

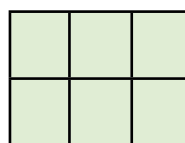
Comme je trouvais mon jardin un peu trop petit, j'ai cherché à l'agrandir tout en souhaitant qu'il conserve sa forme carrée. Je m'en fus trouver mes voisins, leur demandant s'ils accepteraient de me vendre un petit bout de leur terrain qui jouxtait le mien.

Je m'adressais d'abord à mon voisin de droite, celui que je rencontrais le plus fréquemment. Il accepta de me vendre une bande de terre que je pouvais accoler à mon jardin, je vous la colorie en vert.



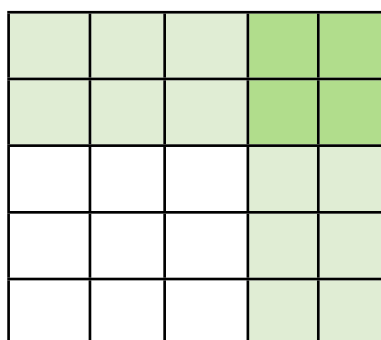
J'avais donc maintenant un jardin de cinq petits carrés sur l'un de ses côtés. Je pris alors contact avec mon voisin du «dessus», lui faisant part de mon souhait : faire en sorte que je sois l'heureux propriétaire d'un jardin carré, dont l'un quelconque des côtés avait 5 pas, ou 5 mètres si vous voulez.

Il ne put faire mieux que d'accepter de me vendre la petite bande de terre allongée que vous voyez sur ce dessin :



Chacun de mes voisins m'avait certes vendu 6 petits carrés, c'était fort aimable de leur part, mais ça ne faisait pas le compte pour moi, je n'avais pas un jardin carré.

Je retournais alors voir mon voisin de droite qui disposait de davantage de facilités. Il accepta de me céder 4 petits carrés supplémentaires : j'avais enfin mon jardin carré plus grand que le précédent :



Son étendue était maintenant de $5 \times 5 = 5^2 = 25$ mètres carrés. J'avais donc agrandi mon premier jardin de $25 - 9 = 16$ mètres carrés.

Je réalisais soudain que 16 était le carré de 4 : $4 \times 4 = 4^2 = 16$, et donc la somme du carré de 3 et du carré de 4 était égale au carré de 5 :

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \quad !$$

Alors ça, c'est curieux n'est-ce pas ? (Ces mots réveillèrent quelque peu l'attention de nos amis qui commençait à se relâcher). J'ai fini par me demander un jour quels étaient les nombres qui pouvaient satisfaire à une égalité du même genre, quels peuvent être les nombres n , p et q qui vérifient la relation

$$n^2 + (n + p)^2 = (n + q)^2 .$$

Mais ce n'est pas de cela que je veux vous entretenir, mais de quelque chose quand même d'analogue à ce phénomène, et qui provient encore de mes travaux de jardinage.

Constatant que son dernier propos avait plutôt quelque difficulté à passionner son auditoire, Monsieur Pathogyre fouilla dans sa poche et en sortit une boîte rose sur laquelle tous les regards se fixèrent. Que pouvait-il bien y avoir dans cette boîte ? En la tournant plusieurs fois de droite à gauche, puis de gauche à droite, notre Enchanteur éleva le niveau d'intensité de l'attente.

Il ouvrit enfin la boîte. Certains étant coupés en deux selon une diagonale du carré qui formait leur base, elle contenait ces sucreries orientales et colorées appelées loukums. Ce fut un moment de délectation partagé autant par Céphaline, Kangourou et Sphalos, que par l'Enchanteur lui-même.

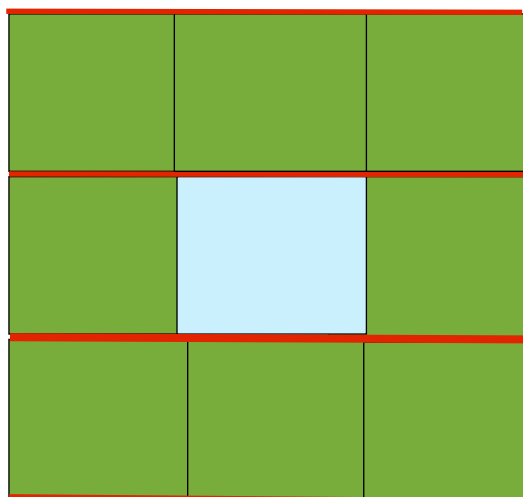
- À l'origine des loukoms actuels, dit-il, se trouve un médicament de mon enfance, à base de miel, avec lequel on soignait les maux de gorge. En hiver, j'emporte toujours dans mes poches l'une de telles boîtes, toujours heureux de pouvoir en partager le contenu avec mes hôtes.
- Ils sont délicieux, dit Céphaline, mais pourquoi certains de vos lokums sont-ils partagés en deux ?
- Parce qu'ils symbolisent le secret dont je vais vous parler.

CHAPITRE VI

LE RÉCIT DE LA DIAGONALE

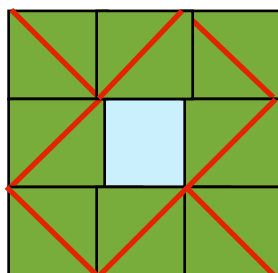
- Il me fallait entretenir mes jardins, planter, arroser, enlever ces coquines de mauvaises herbes, et bien sûr ramasser et cueillir. Mon premier jardin, vous le savez, était tout petit, neuf petits carrés de un mètre chacun de côté. J'ai cherché un cheminement dans ce jardin qui, à la fois me permettrait de bien faire pousser toutes mes plantes, et prendrait la moindre place possible.

Je dessinais mon carré, puis en rouge des éléments de parcours qui me permettaient sûrement d'atteindre tous les points du jardin sans avoir à faire trop d'extension des bras et des mains, le carré central n'étant pas cultivé.



Le dessin me montra aussitôt que la longueur de ce parcours était de 12 mètres. Pouvais-je faire mieux ?

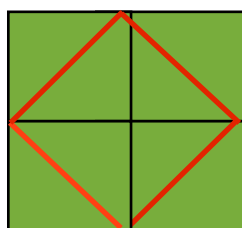
Je fis d'autres essais et aboutis à celui-ci :



J'avais 8 traits rouges au lieu de 12, mais la longueur de chaque trait sur le nouveau dessin était manifestement plus grande que celle de chacun des traits qui apparaissaient dans le premier dessin où elle valait un mètre. Y avais-je vraiment gagné ?

Il me fallait évaluer la longueur de ces petits chemins rouges qui joignent deux points opposés de chaque carré, et qu'on appelle des diagonales.

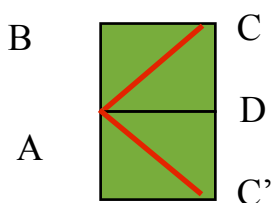
Or il se trouve que j'avais fait un essai intermédiaire où je ne tenais pas compte du fait que le carré central ne devait pas être cultivé. Y figurait cette configuration :



Chaque diagonale rouge partage un petit carré vert en deux parties d'égale étendue. Donc l'étendue du domaine à l'intérieur du chemin rouge, sa superficie, est la moitié de celle du domaine formée par les quatre carrés réunis.

Si a^2 désigne l'étendue, la superficie d'un petit carré, le grand domaine vert formé de quatre petits carrés a pour étendue $4 a^2$, et sa moitié est donc $2 a^2$.

Le dessin suggère aussi que le domaine délimité par le chemin rouge est un carré. Ce qui est déjà certain est que tous les côtés du domaine sont égaux.



Et si d'un sommet A de ce domaine, je fais tourner l'un des deux petits carrés qui ont en commun ce sommet jusqu'à ce que les deux diagonales rouges AC' et AC se confondent, le point D vient bien en B, de sorte que AC

est perpendiculaire à AC' . Le domaine délimité par le chemin rouge est bien un carré.

Si donc c désigne la longueur d'une diagonale telle que AC , l'étendue, la superficie, l'aire de ce carré est égale à c^2 .

On a vu par ailleurs que cette étendue est la moitié de celle formée par les quatre petits carrés verts réunis qui vaut $2a^2$.

Ainsi, celui qui connaît la valeur de la longueur a du côté du carré, en déduit celle de la diagonale c de ce carré grâce à l'égalité

$$2a^2 = c^2.$$

ou encore, comme $2a^2 = a^2 + a^2$, en se référant au dessin géométrique, dans un carré de côtés AB et BC , la diagonale AC vérifie :

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

N'est-pas magnifique ?

- Oui, dit Céphaline, je ne sais pas si c'est vraiment magnifique, c'est en tout cas esthétique. Alors quand la longueur du côté du carré vaut 1, le carré de la longueur de la diagonale vaut 2. Mais comment en déduit-on la valeur c de cette longueur ?
- Oh, vous savez, avec mes amis, on utilisait une méthode très simple. Pour obtenir un résultat de qualité, il faut mettre en oeuvre cette même méthode plusieurs fois, et donc être patient avant de pouvoir être assez satisfait. C'est une méthode très générale, souvent employée, qui consiste à procéder par approximations successives, chaque fois meilleures.

2, c'est comme 200 divisé par cent. Nous savons que 14 multiplié par 14 fait 196, qui est proche de 200, et que $15 \times 15 = 225$. Donc la longueur de la diagonale du carré de côté 1 est comprise entre 1,4 et 1,5 mais plus proche de 1,4, de carré 1,96, que de 1,5, de carré 2,25.

Pour l'instant, nous avons la possibilité de prendre 1,4 comme approximation, mais cette approximation est assez grossière. On va sans doute l'améliorer en prenant comme approximation un nombre compris entre 1,4 et 1,5 : par exemple celui situé au milieu de ces deux nombres, soit 1,45. Son carré, 2,1025, reste plus grand que 2. Mais cette approximation est meilleure que les deux précédentes 1,4 et 1,5.

Comme ce procédé semble fonctionner, recommençons. Prenons un nombre situé au milieu de 1,45 dont le carré est plus grand que 2, et de 1,4 dont le carré est plus petit que 2. Ce nombre au milieu est 1,425 : son carré est 2,030625, encore légèrement plus grand que 2, mais l'approximation avec 1,425 est meilleure que la précédente 1,45.

Comme tout à l'heure, regardons ce que donne comme carré un nombre situé au milieu de 1,4 et de 1,425, soit 1,4125 : son carré est 1,99515625, vraiment très proche de 2. On pourrait convenir d'adopter 1,4125 comme approximation, en sachant que ce n'est pas la valeur exacte, mais en tout cas une bonne approximation. Cela dit, on peut chercher à faire encore mieux. Courage.

En prenant le nombre 1,41875 situé au milieu de 1,4125 et de 1,425, puis le nombre 1,415675 au milieu de 1,4125 et de 1,41875, et enfin le nombre 1,4140375 au milieu de 1,415675 et de 1,4125, on obtient pour ce dernier un carré égal à 1,99950 ... ce qui est une très bonne approximation.

Comme 1,4140375 est un nombre long, on s'en tient généralement à l'approximation donnée par le nombre court et facile à retenir 1,414 dont le carré est très voisin du précédent (1,999393).

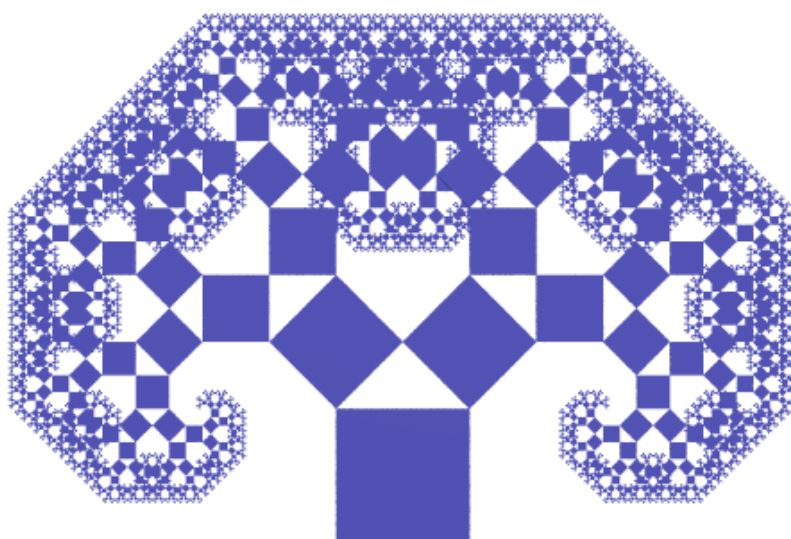
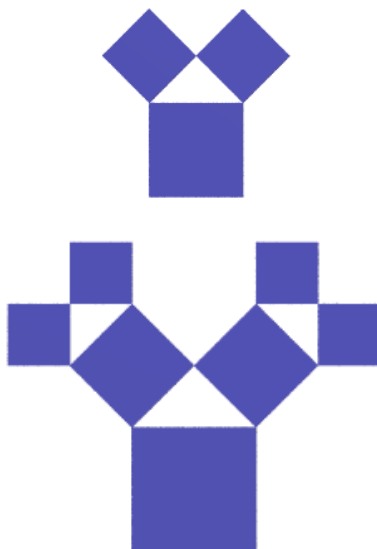
- Ouf! dirent ensemble Céphaline, Kangourou et Sphalos, tout ceci ne nous paraît pas très difficile, mais c'est en tout cas bien long ! Eh si on se reposait un peu ?
- Vos lokoums sont très bons, chuchota Céphaline.
- Mais prenez, prenez, servez-vous les enfants !

Quelques minutes plus tard, l'Enchanteur ajouta triomphalement :

- Vous voyez, en choisissant de travailler mon jardin en diagonale, j'avais gagné en déplacements puisque la longueur de ce parcours, 8 fois 1,414 soit à peu près 11,3, était moindre que les 12 que j'aurais dû faire en choisissant la première solution, la plus simple selon l'apparence.
- Oui, mais la différence est faible, 0,7 dit Kangourou. Valait-il la peine de faire tant d'efforts pour arriver à ce petit résultat ?
- Oh! dit Monsieur Pathogyre. Je travaille dans mon jardin si souvent, disons en moyenne un jour sur deux. Tenez, supposez que je ne m'en occupe que 200 jours par an, sur 1000 ans, j'aurais gagné $0,7 \times 200 \times 1000 = 140\ 000$! Ce n'est pas rien, ça ? Et puis surtout, maintenant tous les hommes, de tous les temps futurs, connaîtront ces merveilleuses relations, si simples et qui, comme moi

dans mon jardin, leur permettront souvent de mieux s'organiser, de moins dépenser, de vivre mieux ! N'est-ce donc pas magnifique ?

- Magnifique n'est peut-être pas le mot qui convient, dit Sphalos. Mais vous avez raison. Le fait que ce résultat puisse être si utile, et surtout qu'il soit vrai partout et de tous les temps tient du prodige. Je dirais qu'il est prodigieux !
- Et vous qui nous l'avez fait découvrir, ajouta Kangourou, vous êtes comme un magicien !
- Vous savez, je ne suis que le cousin du Père Noël !



\mathcal{L}

CHAPITRE VII

ENCORE PLUS ÉTONNANT

De retour au chalet, dans leur cuisine et dans leur salle de bains dont les murs bien droits étaient tapissés de faïences carrées bleues et blanches, Kangourou, Sphalos et Céphaline s'amusèrent à vérifier les dires de Monsieur l'Echanteur, cousin du Père Noël. Après tout, peut-être s'étaient-ils laissé endormir et gruger par des propos rapidement avancés, et qu'ils n'avaient pas eu le loisir de disséquer.

Les mesures qu'ils firent étaient convaincantes, donnaient raison à Monsieur Pathogyre. Ils s'amusèrent alors à reconstituer la chaîne de dessins qu'il leur avait présentés et de raisonnements qu'il leur avait tenus.

Ils s'émerveillèrent de ce que l'esprit humain pouvait parvenir à établir, et de la manière souvent inattendue, selon l'apparence, avec laquelle il procédait.

Il y eut quelques discussions pour savoir comment remercier Monsieur Pathogyre de leur avoir confié un si beau secret. Sous l'influence de Céphaline qui savait fort bien faire les gâteaux, ils préparèrent une pâtisserie au chocolat, en forme de carré bien sûr, le dessus étant recouvert d'une fine pâte d'amande verte, ou bleue, de petites diagonales roses toujours en pâte d'amande : en somme, une reconstitution du premier jardin de Monsieur Pathogyre.

Inutile de dire combien le cousin du Père Noël fut touché par le geste de ces enfants lui offrant ce présent.

- Même mon cousin le Père Noël ne saurait me faire un cadeau qui me fasse autant plaisir. Merci, merci les enfants, leur dit-il, très ému.

Alors je vais vous confier que le secret sur le carré que je vous ai révélé n'est que le premier élément d'un secret encore plus vaste qui n'a cessé d'étonner les hommes.

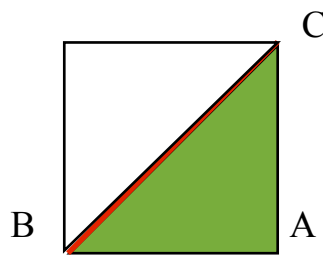
Céphaline, Kangourou et Sphalos s'immobilisèrent, le regard fixé sur Monsieur Pathogyre, l'Enchanteur, le Maître, prêts à boire avidement toutes ses paroles.

- Vous vous rappelez que, dans un demi-carré qui forme un triangle, le carré de la diagonale, diagonale qu'on appelle aussi une hypoténuse, vaut la somme des carrés des deux autres côtés. On avait écrit :

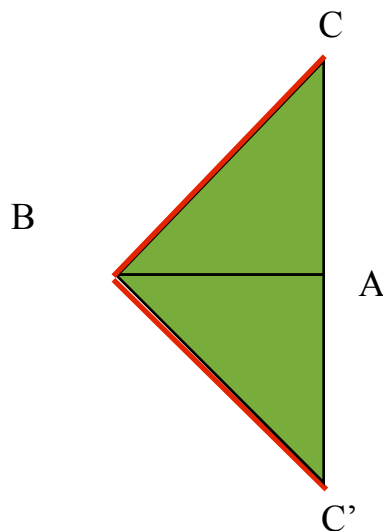
$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

Je redessine maintenant ce triangle ABC

D

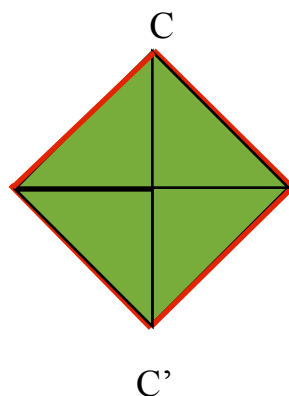


et construis un carré de côté BC, d'abord en doublant le triangle ABC par symétrie par rapport au côté AB, de la sorte le triangle BCC' a même superficie a^2 que notre carré initial ABCD,



puis en doublant le triangle BCC' par symétrie par rapport au côté CC'. J'obtiens ainsi la figure BCB'C' dont l'étendue $2a^2$ est le double de celle du carré initial ABCD.

Cette figure est bien celle d'un carré, d'une part les côtés sont égaux par construction, et d'autre part BC est bien perpendiculaire à BC', car



tourner de BC' vers BA est égal à tourner BA de vers BC , et tourner de BA vers BC est la moitié de tourner de BA vers BD de sorte que :

tourner de BC' vers BA puis de BA vers BC , soit de BC' vers BC , est la même chose que de tourner de BA vers BD .

J'espère que je ne vous ai pas trop fait tourner la tête avec ces observations !

Continuons. La superficie $2a^2$ ce carré est aussi c^2 , le carré de son côté et l'on retrouve à nouveau notre fameuse égalité

$$2a^2 = c^2.$$

- Mais, Monsieur Pathogyre dit Sphalos, c'est toujours le même secret, vous nous avez raconté la même chose que la dernière fois où nous nous sommes vus, ou presque !
- Ou presque, c'est bien là le point essentiel aujourd'hui. Mon point de départ est différent du précédent. Car aujourd'hui je me suis donné le triangle ABC et non point un carré comme la dernière fois, et c'est à partir de ce triangle que j'ai construit un nouveau carré.
- Soit, mais le résultat final est le même et nous n'avons pas appris quelque chose de véritablement nouveau.
- Eh bien, attendez encore un peu, vous allez voir. Il m'a fallu beaucoup de temps pour qu'en mon esprit plusieurs faits un peu semblables que j'avais rencontrés finissent par s'organiser en un tout cohérent.

Vous vous souvenez que j'avais agrandi mon premier jardin. La superficie du jardin agrandi était évidemment égale à la superficie du premier jardin augmentée de la superficie des parcelles de terre que j'avais achetées, ce qui donnait la relation

$$9 + 16 = 25$$

ou encore

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Je ne pouvais que faire le rapprochement de cette égalité avec celle qui caractérise les côtés de notre triangle ABC dont les côtés AB et BC sont égaux, le côté AB étant perpendiculaire au côté BC,

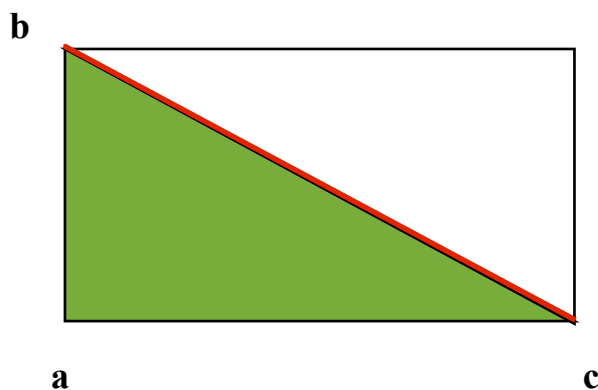
$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

Ce rapprochement suggérait qu'après tout, il pourrait exister des triangles **abc** dont les côtés ne soient pas égaux, mais dont la somme des carrés des longueurs de deux côtés soit égale au carré de la longueur du troisième côté.

Le fait que soit présent le même type de relations entre carrés de longueurs suggérait que les triangles ABC et **abc** aient quand même quelques points communs.

Le plus simple était de faire l'hypothèse que, comme l'ancien ABC, le nouveau triangle **abc** ait lui aussi deux côtés perpendiculaires.

Je fis donc un dessin de ce nouveau triangle, dont les côtés **ab** et **bc** sont à la fois inégaux et perpendiculaires :



Comme vous le voyez, un tel triangle est la moitié d'un rectangle : on dit que c'est un triangle rectangle.

Eh bien voilà mon véritable secret : dans un tel triangle rectangle plat **abc**, on a toujours la relation entre les longueurs des carrés des côtés :

$$ab^2 + ac^2 = bc^2$$

CHAPITRE VIII

MONSIEUR PATHOGYRE A RAISON

Sur le moment, la révélation de Monsieur Pathogyre n'impressionna guère nos amis. Pour Céphaline, il semblait peu probable que la connaissance de cette propriété des triangles rectangles ait quelque rapport avec la rencontre du futur élu de son coeur. Pour les merveilleux Kangourou et Sphalos, capables de franchir des distances dépassant toute imagination, ces petites relations étaient d'abord teintées d'insignifiance. Cependant l'attitude de Kangourou, qui rêvait parfois d'architecture, devint moins réservée : une telle relation pourrait naturellement lui être fort utile pour préciser l'importance des quantités de matériau à utiliser. Quant à Sphalos, que Monsieur Pathogyre ait eu besoin de préciser que le triangle devait être plat, l'intriguait.

Le temps avait changé. La clarté du ciel bleu avait été rapidement effacée par l'arrivée menaçante d'une masse nuageuse toute grise. Une humidité glaçante suintait des boursouflures obscures. Céphaline, Kangourou et Sphalos se rapprochèrent de la cheminée. Leur regard s'attachait à suivre les mouvements inattendus de la danse bleutée des flammes. Les braises rougeoyantes répandaient leur chaleur réconfortante et apaisante. Seuls quelques crépitements brisaient par instant le silence.

Ce fut Kangourou qui soudain évoqua le sujet. Cela n'avait rien à voir avec les lourds flocons blancs qui commençaient à tomber, le feu joyeux qui éclairait leurs visages.

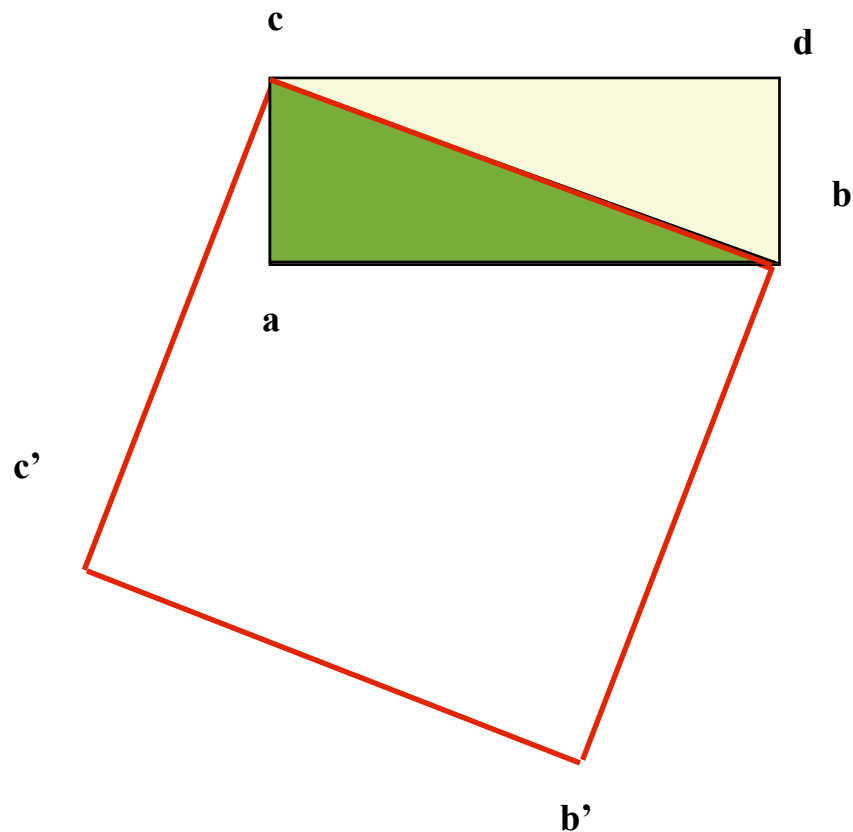
- Et si l'on essayait de trouver comment Monsieur Pathogyre était parvenu à établir sa fameuse relation pour les triangles rectangles ?
- Plats, ajouta Sphalos.
- Pourquoi pas, ajouta Céphaline qui commençait à s'agiter.

Ils prirent chacun une feuille de papier, s'armèrent de crayons de toutes les couleurs. Ils dessinèrent un triangle rectangle rouge et vert.

- Bon, je le dessine comme un demi-rectangle, et puis après ? dit Sphalos.

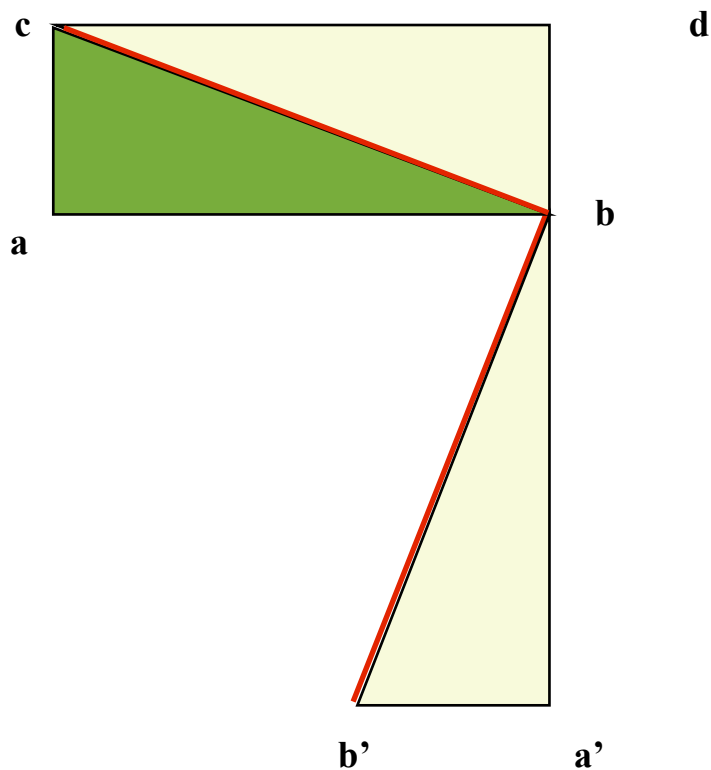
Chacun avait encore en tête les constructions faites par Monsieur Pathogyre, d'où finalement, par ses observations, il avait tiré sa conclusion.

- Et si on faisait comme lui ? pensa à haute voix Céphaline.
- Oui, sans doute, il faut employer son procédé, ajouta Kangourou, puisqu'il conduit au résultat, et que les deux figures, celle du carré et celle du rectangle, au fond diffèrent peu.
- Si donc je reprends le discours de l'Enchanteur, il me semble que c'est en sa fin qu'il insiste sur ce qui fait la différence entre sa première explication et la seconde, où il dit construire un carré dont le côté est la diagonale, l'hypothénuse du triangle rectangle.
- Parfait, dit Sphalos, dessinons ce carré. Je l'appelle **cbb'c'**. Hum !



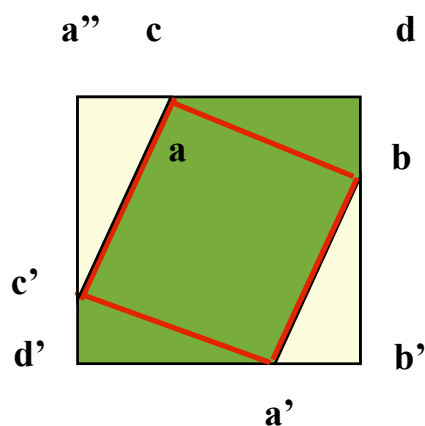
- Hum ! dit Céphaline.
- Oh ! Regarde, fit Kangourou. Si je fais tourner le triangle **abc** autour de **b** de sorte que **bc** devienne **bb'**, il devient un triangle **bc'a'**, et les points **d**, **b** et **a'** sont alignés.
- Pourquoi cela ?
- Monsieur Pathogyre avait dit qu'on appelait angle la mesure de la rotation de **ab** vers **ac**. Comme **ab** et **ac** sont perpendiculaires, on dira que cet angle est droit.

L'angle en **b** du rectangle **abcd** est aussi un angle droit. L'angle en **b** du carré **cbb'c'** est aussi droit. Car si je lui enlève l'angle en **b** du triangle **abc** puis lui ajoute toujours en **b** l'angle du triangle **ba'c'** qui lui est égal, alors l'angle en **b** du triangle **aba'** sera droit.



Maintenant, rappelle-toi, on a rencontré une ligne BH comme ici **ab** qui était à la fois perpendiculaire à une ligne 4 et axe de symétrie de symétrie d'une figure de sorte qu'elle partageait la ligne 4 en deux parties égales qui étaient deux angles droits. Eh bien l'équivalent de cette ligne 4 est ici la ligne **dba'**.

- Mais il me semble qu'on peut également faire pivoter le triangle **abc** autour du point **c**, regarde, l'image **a''** de **a** dans ce pivotement est alignée avec **cd**. Alors on a le début **a''da'** d'un grand carré. Je le complète, j'appelle **d'** le quatrième sommet.



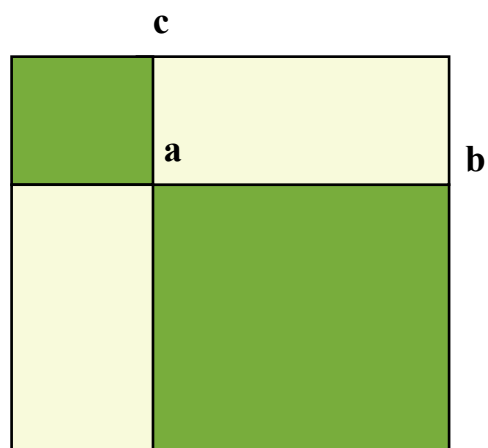
- Comme **cb** est la diagonale du rectangle **abcd**, les triangles **abc** et **dcb** sont égaux, également avec les triangles **ca''c'** et **a''bb'** par suite de nos rotations. Ce serait bien si le dernier triangle **d'b'c'** leur était égal.
- En tout cas, ils ont tous en commun d'avoir une hypoténuse de même longueur puisque, par construction, elles forment un carré dont tous les côtés sont évidemment égaux. Dans le grand carré, les côtés **a''d** et **d'a'** sont égaux, et comme **a''c** est égal à **b'a'** puisque ces côtés proviennent de la rotation du même triangle **abc**, les côtés **d'b'** et **cd** ou **ab** sont égaux. De la même façon, en considérant les côtés **a''d'** et **da'** du grand carré et leurs composants, le dernier côté **c'd'** est égal à **bd** qui est égal à **ac**. Tous les triangles ont donc tous leurs côtés équivalents égaux et sont donc bien égaux entre eux.
- Parfait ! Continuons comme Monsieur Pathogyre. Essayons d'évaluer les superficies, les aires de nos deux carrés.
- C'est facile pour le petit, son étendue est **bc²**.
- C'est un petit peu la même chose pour le grand carré, c'est **(ab + ac)²** puisque **cd** est égal à **ab**, et que **a''c** est égal à **ac**.
- On est bien avancé ! Comment calculer **(ab + ac)²** ?
- Et si on essayait d'évaluer cette superficie en tenant compte de la décomposition du grand carré en éléments plus petits, le petit carré et les quatre triangles rectangles ?
- D'accord. Le petit carré a pour étendue **bc²**, avons-nous dit. Chaque triangle étant la moitié d'un rectangle, deux triangles ont même superficie que le rectangle soit **ab x ac**, et donc la superficie des quatre triangles est **2 ab x ac**. La superficie ou encore l'aire du grand carré est donc **bc² + 2 ab x ac**.
- Oui, mais c'est une relation avec **ab²** et **ac²** qu'il nous faudrait obtenir !

Céphaline, Kangourou et Sphalos se regardèrent, inquiets. N'avaient-ils pas perdu leur temps à trouver et énoncer toutes ces observations ?

Une idée chemina dans la tête de Kangourou : **ab²** est la superficie d'un carré de côté **ab**, et **ac²** est la superficie d'un carré de côté **ac**. Il regarda à nouveau attentivement son dessin, et finit par dire à ses amis :

- Et si on essayait de décomposer le grand carré en éléments différents, où il y aurait un carré de côté **ab**, et un carré de côté **ac** ?

Ils s'attelèrent à la tâche, et obtinrent ceci, ô merveille !



- Regardez ! L'aire de notre grand carré est aussi la somme de l'aire du petit carré à gauche, ac^2 , du plus grand carré à droite ab^2 , et des deux rectangles soit $2 ab \times ac$.

- Alors, on a l'égalité

$$ab^2 + ac^2 + 2 ab \times ac = bc^2 + 2 ab \times ac$$

et donc

$$ab^2 + ac^2 = bc^2 !$$

- Ouha! s'écrièrent-ils tous ensemble, on a gagné ! Vive Monsieur Pathogyre !

CHAPITRE IX

UNE DÉCOUVERTE SURPRENANTE

Pour fêter leurs succès, Céphaline, Kangourou et Sphalos décidèrent d'aller skier sur les pentes du Mont Circus avant d'aller faire quelques visites gastronomiques en des lieux maintenant célèbres.

Ils retournèrent bien sûr à la Pâtisserie riche en gâteaux de toutes les couleurs et de toutes les formes. Céphaline avait grand soif, elle commanda un grand chocolat. Kangourou choisit un gâteau qui avait la forme d'un cube parfait. Sphalos prit une pâtisserie nouvelle en forme de boule toute ronde.

Le dessus du gâteau de Kangourou avait bien sûr une forme carrée. Kangourou, la fourchette levée, hésitait.

- Qu'y a-t-il ? l'interrogea Sphalos.

Kangourou ne répondit pas sur le champ. Sur le glaçage de son gâteau, il traça une fine diagonale.

- Cette longueur de la diagonale m'inquiète. On a trouvé que si le côté du carré est 1, cette longueur vaut approximativement 1,414. C'est bizarre. N'existe-t-il pas une valeur exacte et accessible de cette longueur, avec un nombre fini de chiffres après la virgule ?

- Peut-être, dit Sphalos, va savoir ! Il aurait fallu continuer le processus d'approximation que nous avons engagé. Mais je ne me sens pas le courage de continuer si, par exemple, il faut fabriquer mille chiffres après la virgule avant de pouvoir d'arrêter.

- Moi, non plus. Goûtons ce gâteau.

Et Kangourou plongea hardiment sa fourchette dans la pâtisserie. Ce fut Céphaline qui intervint.

- Tu dis va savoir, va savoir, Sphalos. Quelque chose me dit qu'on doit parvenir à savoir.

- Avec ton quelque chose, on est bien avancé !

- Ce n'est pas parce que je suis une fille que tu dois te montrer si agressif ! Si un nombre a un nombre fini de chiffres après la virgule, par exemple simplement

- 3 chiffres, comme 1, 001, si tu le multiplies ici par 1000, tu obtiens 1001. Alors si tu utilises un instrument de mesure adapté, grossissant par rapport à un autre instrument plus grossier, tu vas pouvoir mesurer exactement 1001.
- D'accord, mais que veux-tu dire à travers cet exemple ?
 - Je veux dire que si le nombre de chiffres après la virgule est fini, comme pour 1001 divisé par 1000 qui est égal à 1,001, on doit pouvoir l'écrire comme un rapport de deux nombres ordinaires, qu'on appelle des nombres entiers, alors que 1001 divisé par 1000 est appelé un nombre fractionnaire.
 - Soit, je veux bien. Alors espérons que le nombre qui a pour carré 2 est le rapport de deux nombres que tu dis entiers a et b . Et tu en déduis quoi ?
 - Je ne sais pas encore, mais en tout cas, pour faciliter les choses, on va faire en sorte que ces nombres a et b soient les plus petits possibles. Ça nous fera faire éventuellement moins de travail. Par exemple, si $a = 2n$ et si $b = 2m$, on remplacera le couple a et b par le couple de nombres plus petits n et m .
 - D'accord. Donc ils ne peuvent avoir 2 en commun, autrement dit si l'un est pair, et alors être un multiple de 2, l'autre doit être impair, c'est-à-dire ne peut pas être un multiple de 2.
 - Exactement. Ou bien $a = 2n$, alors $b = 2m + 1$, ou bien l'inverse, si $a = 2n + 1$, alors $b = 2m$.
 - Bon, alors disons par exemple que 2 égale $2n$ au carré divisé par $(2m + 1)$ au carré. Et après ?
 - Attends, je reprends d'abord ce que tu viens de me dire en le détaillant un peu : 2 égale $2n \times 2n$ divisé par $(2m + 1)^2$ ou encore $2 \times (2m + 1)^2 = 2n \times 2n$, et donc $(2m + 1)^2 = 2n^2$.

Céphaline s'était arrêtée de parler et de boire. Kangourou et Sphalos restaient silencieux; leurs gâteaux, à moitié entamés, désarçonnés par cet abandon de leurs maîtres, inquiets de ne plus les rendre heureux par le plaisir qu'ils leur apportaient, les regardaient avec tristesse. Sphalos, Kangourou et Céphaline ne savaient plus que faire, que dire.

- Attendez! dit soudain Kangourou. Vous rappelez-vous que nous avons calculé de plusieurs façons l'étendue d'un carré de côté $\mathbf{ab} + \mathbf{ac}$? C'est bien sûr $(\mathbf{ab} + \mathbf{ac})^2$ mais aussi $\mathbf{ab}^2 + \mathbf{ac}^2 + 2 \mathbf{ab} \times \mathbf{ac}$ n'est-ce-pas ? Alors $(2m + 1)$ au

carré est égal à $2m \times 2m + 1 \times 1 + 2 \times 2m \times 1$, soit $4m^2 + 1 + 4m$ qui est un nombre impair. Mais il ne peut être égal à $2n^2$ qui est un nombre pair ! Donc ce que tu as dit, à savoir que 2 égale $2n$ au carré divisé par $(2m + 1)$ au carré, est impossible !

- Alors ça, c'est curieux, inattendu ! Mais peut-être l'autre possibilité $a = 2n + 1$, $b = 2m$ est-elle plus raisonnable ?
- Voyons, cela donne $2 = (2n + 1)^2$ divisé par $(2m)^2$, ou encore $4n^2 + 1 + 4n$, qui est un nombre impair, est égal $2 \times (2m)^2$ qui est un nombre pair : c'est encore impossible !

Céphaline, Kangourou et Sphalos n'en revenaient pas. 2, s'ils ne s'étaient pas trompés dans leur suite de raisonnements, ne pouvait être égal au carré du rapport de deux nombres entiers. Ou encore, aussi grandement précise soit la règle qu'ils utiliseraient pour faire leurs mesures, elle ne parviendrait pas à leur donner la mesure exacte de la diagonale du carré de côté 1. Qu'est-ce que ce nombre bizarre, un peu fou peut-être, que l'on ne parvient à saisir que par la valeur de son carré ? Ils étaient assez perplexes.

Pour se remettre de leurs émotions, ils terminèrent leur goûter avec avidité. Un mystérieux Père Noël qui, curieusement, passait par là, le sourire en coin, leur glissa à l'oreille, «Bravo les enfants, allez voir mon cousin !». Le temps de se retourner, Père Noël avait disparu.

CHAPITRE X

LE DISCIPLE DE MONSIEUR PATHOGYRE

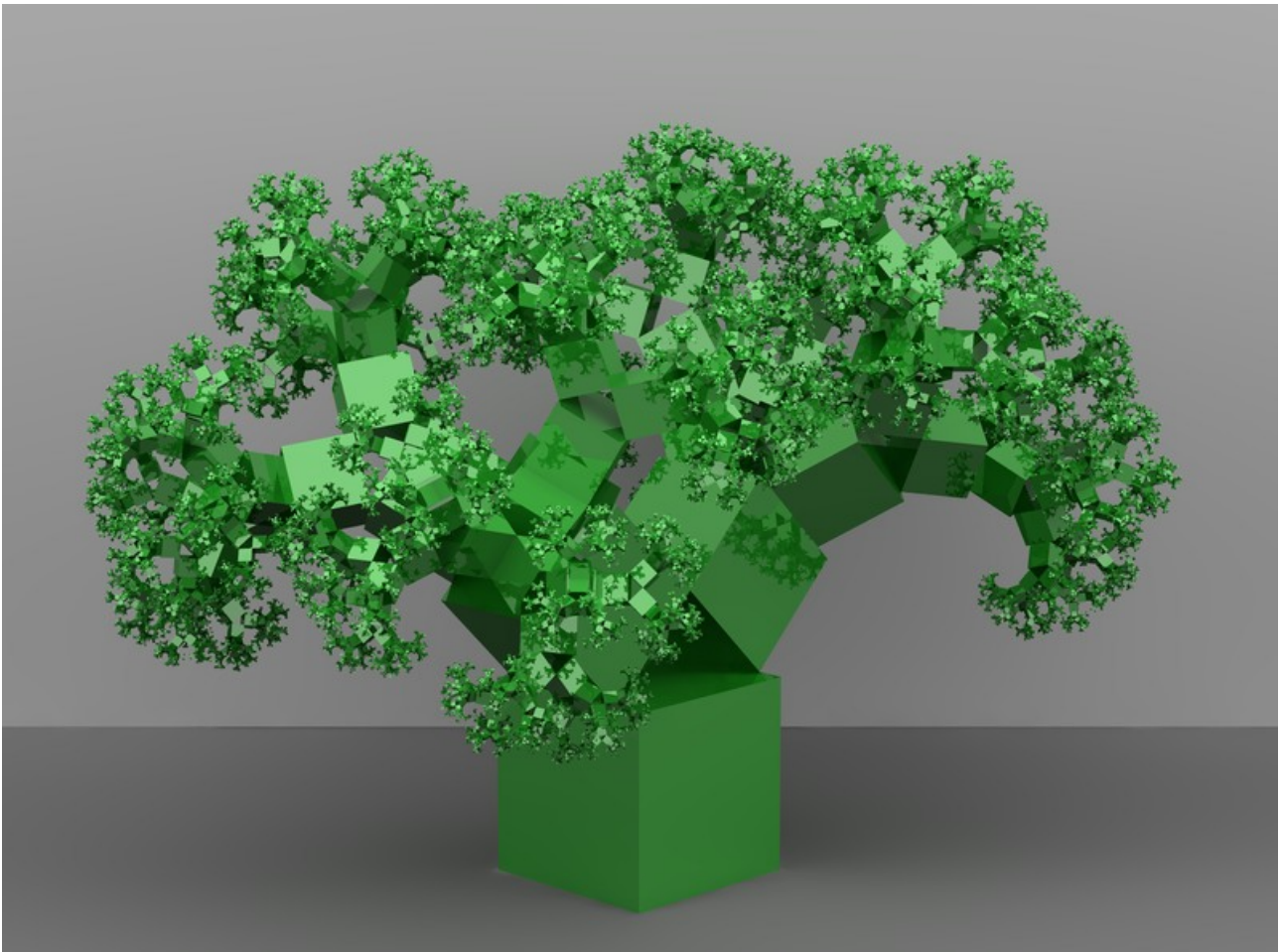
Il faisait déjà bien sombre quand ils arrivèrent au chalet. Il était trop tard pour aller voir Monsieur Zoroastre Pathogyre. Son prénom, avait-il raconté, lui avait été donné par les devins qui de lui voulaient faire un disciple. Selon ces devins, le prénom fixait et révélait le destin. N'était-il pas devenu en effet, lui, Zoroastre, un astrologue, contemplant jour et nuit les émanations volantes qui, les nuits, illuminaient le ciel, découvrant dans ses rêves les spectacles parfois grandioses qui enflammaient l'univers ? N'avait-il pas donné à ses parcelles de jardin, en souvenir de ses heureux voyages dans l'éther sidéral, le nom fabuleux de ces astres dont il avait fait des amis ?

Mais c'est en concevant son jardin, en cherchant à lui apporter toutes les beautés qui le rendraient propice à l'hommage des dieux, qu'il avait découvert les secrets de la diagonale et ceux du nombre à la représentation sans fin. N'était-ce pas la récompense que les dieux reconnaissants lui avait donnée ?

- Mon jardin était devenu célèbre, et beaucoup, qui espéraient me voir, se demandaient pourquoi et comment il avait été conçu. Trop souvent accaparé par mes observations, plongé dans mes rêves, je ne pouvais leur répondre. Surtout, je ne voulais leur répondre. Le savoir ne doit se transmettre qu'à de sages mains, qui sauront en prendre soin, le conserver précieusement, l'enrichir dans la beauté, en faire l'usage pour le seul bien des hommes. Un jour, dans mon pays, la Babylonie comme vous le savez, vint un habitant de vos contrées lointaines, parcourant les pays à la recherche, disait-il, de la connaissance. Je fus curieux de recevoir cet homme rare. Il était né en Grèce, dans une île fameuse par ses vins, Samos, et comme pour moi, les dieux avaient laissé leur empreinte dans son nom. Alors je me fis un devoir de lui révéler mes secrets, pour qu'il les porte à ceux qu'ils devaient rencontrer, façonner, et juger dignes de recevoir ces secrets. Mais vous qui avez su écouter, penser, chercher, imaginer, découvrir, vous qui savez

transposer, casser les codes, briser les secrets, devinez-vous qui fut ce disciple renommé ?

- PYTHAGORE ! s'écrièrent-ils tous ensemble.



Jos Leys

NOTES «HISTORIQUES»

*La lecture de ce texte suppose d'avoir déjà fait connaissance avec nos héros (cf *Le Kangourou merveilleux*, *Les Délicieuses Glissades de Sphalos*) que l'on pourra présenter en avant-propos.*

1) Dans les temps anciens, dès l'âge de 9 ans, les enfants apprenaient à résoudre des problèmes posés à propos de bassins qui se remplissaient, de trains qui se croisaient.

On apprenait l'art de raisonner.

L'exercice est indispensable pour la formation de l'esprit. Certaines disciplines, comme la mathématique en particulier, offre des possibilités fort riches de le pratiquer.

C'est à cette fin qu'a été écrit ce conte. Dès l'âge de 9 ans sans doute, l'enfant peut en tirer profit, par un mode d'emploi adapté.

2) C'est d'abord à l'enseignant, au maître qu'il revient, une fois ou deux par semaine, de lire devant ses élèves, se servant parfois du tableau, un chapitre de ce texte. Conformément à mon choix symbolique qui n'est qu'un clin d'oeil à l'histoire, le conte a dix chapitres. La lecture par le maître s'étend donc sur 10 semaines au moins, disons un trimestre.

Naturellement, le maître recommandera à son auditoire la relecture chez soi du chapitre découvert à chaque nouvelle occasion. Il pourra faire relire en sa présence telle ou telle partie du conte. Il pourra, ensuite, interroger ce même auditoire pour savoir ce que celui-ci a retenu.

3) Le maître pourra prolonger l'exercice en incitant l'auditoire à écrire une suite élémentaire du conte : concevoir la notion de triangle sur un petit astre en forme de boule, un peu semblable à celui que l'on voit sur les aquarelles ornant l'ouvrage de Saint-Exupéry, *Le Petit Prince*. Faire voir un triangle équilatéral dont tous les angles sont droits, et faire comprendre ainsi l'impossibilité d'étendre sur une surface sphérique le théorème de Pythagore tel qu'il se présente dans le plan.

Essayer de voir si on peut étendre le dit théorème à un cube. Placer un cube intérieurement à un cube donné et retrouver l'expression de $(a + b)^3$, et montrer que la somme de deux cubes identiques ne peut être un cube (rattacher au problème égyptien de la duplication du cube). On peut bien sûr encore généraliser.

4) Renvoyer sur wikipédia pour des études complémentaires.

On trouvera sur les sites correspondants de nombreuses références historiques. À ce sujet, cette remarque : il existe deux formes d'histoire. Dans la première, l'historien se contente simplement, aussi complexe que soit ce simplement, de narrer les faits. Dans la seconde, l'historien non seulement se plie à l'exercice précédent, mais de plus, et surtout, s'efforce de reconstituer dans l'esprit des protagonistes la genèse des faits, des processus, et de les expliquer. Le travail profond de l'historien est là, il est malheureusement très rare.

C'est bien dans cette seconde optique que ce conte a été écrit. On voudrait inciter l'élève à reconstituer en lui les démarches de l'esprit qui furent peut-être celles des pionniers, des premiers et authentiques découvreurs.

L'élève, quand il rencontre une difficulté, ne pourra que tirer bénéfice de l'exemple donné par ses héros qui, par le divertissement, chassent les soucis bloquant le travail de la pensée, permettant maintenant à celle-ci de chercher et d'apporter des réponses aux questions nouvelles.

5) Il convient de faire valoir la généralité quand elle existe des démarches de l'esprit, notamment :

rechercher au départ la situation la plus simple possible, l'étudier, puis voir comment l'étendre à des situations présentant moins de contraintes, plus générales;

bien définir les procédures d'étude dans les cas élémentaires, et essayer de voir comment les utiliser dans l'examen des situations plus générales.

Ce sont là des trivialisés pour le professionnel, mais sans doute pas pour l'enfant qui pénètre dans cette formation pour la première fois.

6) La construction du conte est quelque peu cyclique : les premier et dernier chapitres font allusion à la théorie des groupes appliquée au codage des messages, se contentant d'introduire deux mots basiques du vocabulaire de cette théorie.

Le chapitre II insiste sur l'importance des deux mouvements fondamentaux : la translation (qui peut être également conçue comme une dilatation) et la rotation. On sait que la vie est mouvement, et que, selon le théorème d'Aristote-Liouville, dans n'importe quel espace, tout mouvement local est le composé d'une translation locale et d'une rotation locale. Le statique n'étant qu'un mouvement localement figé dans le temps, c'est la vision et la représentation animées du monde qu'il convient de mettre en évidence pour mieux décrire et comprendre celui-ci.

À Gometz-le-Chatel, le 24 Janvier 2(01)4