ON AN INTRODUCTION TO MATHEMATICS BY PRESENTING SOME FUNDAMENTAL CONCEPTS EMBODIED IN WORKS OF ART

C.P. Bruter

La pertinence des mathématiques ne concerne plus seulement la représentation et l'intelligibilité du monde, la formation intellectuelle des jeunes gens, mais aussi, par le contact permanent avec l'expression artistique des objets mathématiques, le précieux maintien de l'équilibre individuel dans un monde où l'être est souvent impuissant devant les facéties des tourbillons quelquefois cartésiens du ciel et de la vie. ([1] p. 31)

Abstract

This article[1] is divided into two parts. The first concerns some of the most important concepts and mathematical facts. The second part concerns the analysis of exhibits characterized by the presence of works of art where these concepts are apparent, making it possible to introduce various audiences, especially children, to the intelligence of these concepts. In that way, a more acute and up-to-date development of the mathematical world can be perceived.

Résumé

Cet article est divisé en deux parties. Dans la première sont présentés quelques-uns parmi les plus importants des concepts et des faits mathématiques. Dans la seconde partie, on analyse le contenu d'exposés caractérisés par la présence d'œuvres d'art où ces concepts sont apparents, permettant d'initier des publics divers, notamment des enfants, à l'intelligence de ces concepts, leur ouvrant ainsi la voie à une pénétration plus accentuée et plus actuelle du monde mathématique.

1 Introduction

Il est établi et reconnu que l'image possède un pouvoir sans égal, immédiat, captivant et pénétrant à la fois[2]. Alors pourquoi ne pas le mettre au service

[1]A short English version of this text has been published in [10].

[2]Le philosophe allemand Horst Bredekamp a récemment publié un ouvrage, *Théorie de l'acte d'image*, consacré au pouvoir sur le spectateur de l'image, plus généralement de l'œuvre d'art. Je voudrais ici ajouter quelques remarques. On peut d'abord considérer comme absente de ce texte la référence aux mathématiques. Par ailleurs ce pouvoir de l'image remonte très loin dans l'histoire

d'une connaissance meilleure sinon intime, en tout cas élargie à tous, du monde mathématique ?

Que peut ici révéler l'image ? Des situations et des objets, connus ou inconnus, auxquels sont associés des propriétés peut-être inhabituelles, parfois, étonnantes, en relation avec des faits et comportements universels. Dévoiler alors ce que cache l'image enrichit la compréhension du monde. Dans leur majorité, les programmes scolaires, aux contenus parfois vieillots et toujours fort limités, n'ont pas accès à ces richesses, ni donc à leur contenu formateur. Si les enfants et les jeunes gens les ignorent, il en est ainsi à plus forte raison de leurs parents, du grand public. Utilisons donc l'image de qualité pour construire et conforter une communion de pensée chaleureuse, également pour améliorer la formation de l'esprit en maintenant et en encourageant la vision des objets dans l'espace usuel, en faisant connaître les principaux concepts et objets mathématiques avec lesquels mieux comprendre le monde autour de nous, les raisons pour lesquelles ils ont été conçus.

Un aspect important de l'enseignement des mathématiques est bien en effet la formation de l'esprit. Il n'est pas fréquemment souligné par les pédagogues. La première partie de mon livre, « Comprendre les Mathématiques » [1], est principalement consacrée à l'examen de quelques-uns des effets positifs qu'apporte cet enseignement sur certaines façons dont nous exerçons notre activité intellectuelle. Je vais subrepticement plus loin dans cet article. Je ne voudrais pas insister davantage sur l'importance de la nécessité de façonner des esprits bien faits en ces temps troublés et qui semblent s'annoncer encore plus difficiles.

Dans la première partie du texte qui suit est dressée, sous forme de tableaux, une liste de termes du vocabulaire mathématique le plus basique. Ces termes désignent des concepts, des objets ou ensembles d'objets importants par leurs liens dans la description et la compréhension du monde qui nous entoure. L'image nous permet de les saisir, de les intégrer en nous. La familiarité avec ces termes et leur signification, permet de pénétrer plus facilement dans l'univers mathématique, en facilite la vue d'ensemble. Elle permet aussi d'accéder à une compréhension meilleure, plus profonde de notre monde, cette aperception du monde n'étant pas seulement limitée à celle du monde physique.

de l'humanité, alors qu'elle partageait une conception animiste du monde. L'image devient alors dotée d'un pouvoir, elle acquiert un statut symbolique, symbole qu'on finit parfois par adorer. Enfin l'image, la représentation d'une manière générale possèdent un contenu sémantique riche venant compléter celui associé au discours oral, souvent plus pauvre mais incisif sur certains points particuliers de l'objet représenté. La synthèse entre ces deux sémantiques s'effectue au niveau des aires associatives. La présence et le jeu de ces mécanismes explicitent le rôle si important que joue l'image dans les phénomènes de compréhension, et font de l'image un outil pédagogique indispensable.

La liste n'est bien sûr donnée qu'à titre indicatif. Chacun y puisera les termes qu'il voudra faire valoir, l'enrichira selon sa propre sensibilité.

Dans la seconde partie de l'article, sont résumés et analysés les contenus de divers power points accompagnant des exposés oraux, en réponse partielle aux objectifs énoncés plus haut.

On peut concevoir deux types d'exposés : les premiers s'inscrivent dans le cadre de cursus bien conçus destinés à l'enseignement approfondi des mathématiques, où le contenu mathématique des œuvres d'art est explicité et sert de tremplin à l'approfondissement de ce contenu. On rencontre des éléments de tels cursus dans les systèmes d'enseignement que je qualifie abruptement de « pragmatiques ».

Dans le système éducatif français actuel, à vocation « théorique », où le contenu des cursus s'établit à l'échelon national et s'applique à tous les établissement d'enseignement, ce premier type d'exposé n'est actuellement guère concevable. Dans le cadre de ce système, il est possible depuis peu de temps de faire des exposés du second type : ce sont des exposés d'initiation, ayant pour vocation d'élargir l'horizon de pensée des auditeurs sur des bases réfléchies et de qualité, où les mathématiques bien sûr occupent une place importante, en relation avec d'autres disciplines, notamment celles auprès desquelles les mathématiques ont été fondées et se sont développées.

Les exposés auxquels ce article fait référence sont de ce second type.

2 Quelques grands concepts de philosophie naturelle et de mathématiques susceptibles d'illustrations

2.1

Les grands concepts et faits mathématiques de base sont en prise directe avec la réalité physique. Ils présentent souvent un caractère élémentaire qui les rend facilement accessibles. On peut les présenter soit selon leur importance, soit selon l'époque où ils furent dégagés, sans que peut-être, dans les premiers temps, leur degré de pertinence et d'implication ait été apprécié avec justesse. Ces concepts seront marqués en gras dans le texte de ce paragraphe.

Des concepts récents plus généraux et globaux (catégories, faisceaux, etc), qui prennent leur sens à travers les théories mathématiques de base, ne se prêtent guère à des illustrations en prise directe avec la réalité concrète. Ils ne seront donc pas évoqués dans ce texte, un essai introductif et sans prétention.

Les données fondamentales du monde physique sont présentes dans la terminologie utilisée par les mathématiciens. Les concepts les plus généraux, ils relèvent de la philosophie naturelle, paraissent être ceux d'**énergie**, lié aux ressources disponibles, de **changement**, et de son principe actif, le **principe de stabilité**.

Il est un point qui ne sera pas abordé dans ce texte, lié à la manière sous laquelle se présente l'organisation de la Nature. Le terme générique qu'on peut lui associer est celui de **stratification**. Plutôt par exemple de parler du règne physique, j'emploierai pour ma part la terminologie de strate physique. Bien des termes du vocabulaire mathématique que nous allons rencontrer dans les pages suivantes se rapportent en fait à cette idée visuelle, à ce concept général de stratification. C'est le cas par exemple des termes de base, de pavage, de lignes et surfaces de niveau, de feuilletage, de sous-groupe, d'ensemble singulier.

2.2

Les notions d'énergie, de changement et de stabilité renvoient à des données universelles de tous les règnes, de toutes les strates. Avant d'aborder le vocabulaire mathématique lié à l'énergie et au changement, il nous faut évoquer cette activité non moins universelle qu'est celle de la **représentation**, par laquelle un objet fabrique une sorte de possession de son environnement, afin de mieux assurer sa stabilité spatio-temporelle, lui permettant de reconnaître, de se soustraire ou de combattre ce qui peut nuire à cette stabilité, et d'acquérir les formes d'énergie nécessaires au maintien sinon à l'accroissement de cette stabilité.

Cette représentation existe dans le monde inanimé, certes de manière très primaire. Par exemple la pierre qui vient frapper le bois, laisse une marque sur ce bois : cette marque est une forme de mémoire et de représentation de la pierre.

représentation
projection
(parallèle, conique, stéréographique)
fonction, application, morphisme

Tableau 1

Au cœur donc des activités humaines est l'activité de représentation. Elle fait partie de manière essentielle des outils développés notamment dans le monde animal pour assurer la stabilité spatio-temporelle de leur être. Par l'intermédiaire de notre appareil visuel sont créées dans notre cerveau des images de notre environnement, des représentations mentales : elles conditionnent notre comportement selon leur caractère bénéfique ou maléfique. Leur comparaison

fait apparaître leurs éléments communs. Ainsi naissent les fondements des classifications et des mathématiques. La pertinence des processus mentaux engagés assurent leur stabilité, conduit au développement de l'expérimentation, des recherches théoriques et appliquées à travers des représentations symboliques.

On relèvera, dans la création des représentations naturelles, le rôle joué par la lumière en premier lieu, le son en second lieu, tous deux caractérisés par la présence interne de comportements périodiques particulièrement stables. Indépendamment de nous, sous l'effet du rayonnement solaire, les ombres des objets sur des écrans comme les sols constituent ces premières représentations physiques.

Ainsi l'action des rayons parallèles du soleil sur la pyramide projette, en l'aplatissant, cette pyramide sur le sol : le résultat de cette action, de cette projection, est l'ombre plane de la pyramide. Cette projection est la plus simple et la fondamentale des représentations, fonctions ou applications, quel que soit le nom qu'on lui donne. Elle est constamment employée par les mathématiciens qui projettent des domaines d'abord sur des lignes (les axes de coordonnées), toujours sur des espaces de dimension topologique moindre, car l'examen des propriétés de ces domaines leur devient alors plus facilement accessibles.

La géométrie première est celle de ces ombres. Le mathématicien en étudie les propriétés. Si l'on se souvient du mythe célèbre de la caverne, sur les parois de laquelle se meuvent les ombres des objets et des phénomènes, alors tout homme qui les regarde attentivement est mathématicien.

La mathématique est d'abord une représentation à l'aide de dessins des objets et des phénomènes présents dans notre environnement. Ces dessins sont souvent appelés des *symboles*. Les plus répandus d'entre eux sont les chiffres tels que 3 ou 7, les lettres comme f ou *phi*, des flèches, les signes traditionnels comme +, =, etc, les formes des figures élémentaires comme le carré ou le cercle. Si A désigne un visage, le mathématicien désignera par f(A) sa représentation sur la toile faite par le peintre. Dans un certain domaine des mathématiques, f est effectivement appelé une *représentation*. Le plus souvent, cette représentation apparaît sous le vocable de *fonction* ou d'*application* ou de *morphisme*.

Étant donné l'usage des représentations, leur qualité de fidélité est évidemment essentielle : notamment les invariants les plus fondamentaux de la source se doivent être présents dans l'image. Les objets et phénomènes ayant beaucoup de caractéristiques différentes, on rencontrera souvent des *représentations fidèles* seulement à l'une ou quelques-unes d'entre elles. Le qualificatif utilisé pour certaines de ces représentations, comme par exemple homéo-, difféo-, homo-, iso- qui accompagne le vocable de morphisme, évoque l'une au moins des propriétés des objets représentés.

2.3

Le terme « *énergie* » n'apparaît nullement dans les ouvrages fondamentaux d'Euclide ou de topologie générale, d'arithmétique, d'algèbre, d'analyse. Il figure dans les parties des traités de géométrie différentielle issus de la mécanique, et dans la très grande majorité des travaux de mathématique dite appliquée. S'il n'est pas apparent dans les traités fondamentaux, il est néanmoins présent en arrière-plan, de manière potentielle.

Le concept d'énergie est présent en arithmétique qui étudie les propriétés des nombres classiques, et en premier lieu celles des nombres entiers. Un nombre entier est d'abord un indicateur d'une certaine présence. Non seulement il constitue une représentation primaire de la présence d'une certaine forme matérialisée d'énergie, mais, dans son aspect cardinal, il en donne également une première évaluation tangible.

Associé à un nombre, le carré d'une longueur n'est autre que le travail d'une force le long d'un chemin approprié (cf. [1]). Il est donc l'une des formes d'expression d'une énergie locale. Cette donnée élémentaire reflète la présence et le rôle sous-jacent de la notion d'énergie dans la construction et dans la mise en œuvre des mathématiques de base, notamment de la géométrie.

Le concept d'énergie est également et implicitement présent par exemple chaque fois que l'on parle d'espace, et donc en topologie et en géométrie, parce que l'énergie s'incarne dans un lieu, dans un domaine spatial, et que ce lieu ne se conçoit pas physiquement sans la présence d'énergie.

La topologie traite d'abord du réceptacle de l'énergie, indépendamment de la manière dont l'énergie le structure, lui insère des formes locales ou plus globales. C'est la topologie dite générale. La prise en compte de manière précise de l'énergie permet de préciser les manières dont elle s'incarne sous la forme d'objets dont elle modèle les contours et la structure interne. On fait alors de la géométrie, également de la topologie quand on s'intéresse aux propriétés spécifiques mais intrinsèques des formes.

Dans ce second tableau, reflétant partiellement leur apparition au cours de l'histoire, sont présents les premiers concepts d'abord liés à la notion d'énergie et se rapportant aux objets. L'inventaire et l'étude de leurs formes suivent, quittant petit à petit l'apparence première pour pénétrer plus avant dans leur structure interne et faire apparaître des propriétés plus intrinsèques. Les objets considérés ici présentant des caractères de fixité : leur stabilité spatio-temporelle leur confère la possibilité d'être longtemps et patiemment observés, enregistrés dans nos mémoires, et analysés. Cette stabilité est à l'origine de cet aphorisme d'Aristote : « L'inanimé précède l'animé. » De fait la description de l'inanimé, qui se laisse contempler, observer, assimiler, interpréter sera première au contraire de la description de l'animé, plus insaisissable par nos sens, parfois même fugace. Le

évaluation globale de l'énergie attachée à ces objets : **nombre**
somme, produit, puissance, polynôme
quotient fraction
entiers, rationnels, transcendants, réels, etc…

théories associées : arithmétique, algèbre

évaluation locale ……………………………………: **longueur**
métrique, vecteur, tenseur

formes apparentes avec données métriques ……… : **dimension**
polygones, polytopes, cones, sphères, boules, tores, Möbius, Boy
géodésique, courbes et surfaces, genre, pavages, nœuds
courbure, torsion, lignes et surfaces de niveau
sommet, singularité, ensemble singulier

objets

théorie associée : géométrie
(les différents types de géométrie)

formes apparentes sans données métriques………..: **voisinage**
espace ouvert, fermé, intérieur, bord
espace fibré, feuille, feuilletage
anse

théorie associée : topologie

Génération, techniques de construction des objets…: **base, génération**
extension, fibre
déploiement
inflation, pincement, attachement, identification, épaississement
revêtement.

Tableau 2

cinéma naquit après la photographie, Fermat et Huygens vinrent près de deux milliers d'années après Euclide.

2.4

La prise en considération, l'approche et la maîtrise du changement et du mouvement se sont progressivement accompli dans le cours de ces derniers millénaires, à un rythme croissant. Les physiciens n'ont cessé de trouver des procédés nouveaux pour accéder à l'observation de phénomènes de plus en plus rapides.

De la même façon, les mathématiciens ont produit de plus en plus de travaux consacrés à l'étude des mouvements. Le terme « changement » ne figure pas dans le vocabulaire technique des mathématiciens. Ce vocabulaire se rapporte à la plupart des modalités de ce changement : changement dans la position, spatiale, temporelle, spatio-temporelle changement dans la seule forme, changement dans les données qui définissent les positions et les formes, et au contraire, absence de changement relative à telle ou telle propriété caractéristique de l'objet ou du phénomène examinés. Ce vocabulaire concerne donc les *mouvements* subis ou que l'on fait faire : dans l'espace et dans le temps, ils portent plutôt le nom de *transformations* ; lorsqu'ils s'agit de la forme et des paramètres qui la définissent, on parle plutôt de *déformation*.

mouvements subis ou que l'on fait faire dans l'espace et dans le temps	*mouvements* subis ou que l'on fait faire à la forme, à ses paramètres
transformation **déplacement, translation, rotation** **dilatation (homothétie)**	**déformation**

Tableau 3

Il ne serait nullement déplacé d'inscrire également dans ce tableau les techniques de construction des objets rencontrées dans le tableau 2 précédent et qui s'accompagnent de changements divers. Quant aux techniques d'étude des mouvements spatio-temporels, elles relèvent des *théories des équations différentielles* et des *équations aux dérivées partielles*. Dans les premières de ces théories, on établit en chaque point de l'espace la vitesse de changement en fonction de la seule position. Dans les secondes de ces théories, on établit la valeur instantanée de paramètres significatifs en fonction des variations de la valeur donnée d'autres paramètres non moins significatifs Toutes ces théories,

par leur caractère local, relèvent principalement de l'***analyse***, même si géométrie et algèbre ont leur part souvent importante dans leur étude.

L'analyse peut se définir comme l'étude fine des représentations des objets et de leurs transformations par le nombre. Elle décompose l'objet en éléments de plus en plus petits, puis additionne ces éléments pour reconstituer le tout. Comme ces éléments, ces fractions du tout sont de même nature, la représentation numérique de chacun d'eux conserve des propriétés de similarité. On a donc procédé à ce qu'on appelle une *décomposition fractale* de ce tout. Il reste à s'assurer que la somme des éléments ainsi définis, appelée d'un terme un peu impropre une *série* lorsque cette somme se compose d'un nombre infini d'éléments, correspond bien au tout : c'est le problème de la *convergence* des séries.

Pour en revenir au changement et au mouvement, à leur description, qui, du point de vue intrinsèque, relève de la ***théorie des systèmes dynamiques***, retenons pour l'instant ces seuls trois termes :

trajectoire, attracteur, bassin d'attraction

Tableau 4

Le premier de ces termes est lié au terme déjà rencontré de *feuille*, les trajectoires peuvent être rassemblées en feuilles qui feuillettent l'espace dans lequel adviennent les mouvements. Le choix heureux de cette terminologie vient sans doute de la physique, de l'électromagnétisme, un feuillet magnétique étant une lame mince aimantée. Le second de ces termes, attracteur, est souvent qualifié de *singularité* ou d'*ensemble singulier*.

2.5

Si l'énergie se rapporte aux ressources nécessaires au déploiement de toute forme d'activité, le principe de stabilité se situe en grande partie à l'origine de ce déploiement.

On trouvera dans [2] un historique de ces deux notions. Elles sont présentes dans tous les domaines des sciences et des techniques, et même aujourd'hui dans celui de la vie courante : elles sont en quelque sorte dotées du don d'ubiquité. De ce fait, il n'existe aucune définition précise et générale de ces termes correspondant à leur emploi en mathématique. Souvent, telle ou telle étude fait appel à ces notions en introduisant et en nommant par exemple « énergie » une entité mathématique particulière adaptée à cette étude. Si la notion d'énergie est difficile à appréhender – l'énergie est une entéléchie, celle de stabilité est associée à un principe et à des activités organisatrices qui semblent universelles.

Les objets sont d'abord reconnus par leur apparence, leur forme extérieure. On procède ensuite à l'examen de leur constitution intérieure. Mais un objet ne peut exister sans faire preuve d'une forme quelconque de stabilité. Dans le monde naturel, le concept de stabilité paraît sous la forme d'un principe essentiel qui remonte à Platon, que seul Spinoza a repris, et que l'on peut aujourd'hui formuler ainsi : « tout objet s'efforce de conserver son Moi dans l'espace et à travers le temps ».

Ce concept se déploie de bien des façons.

La première incarnation de la stabilité se présente sous la forme de l'invariance [4] à laquelle s'opposera la non-stabilité, la non-invariance. La forme primitive et apparente d'invariance s'affiche par le caractère statique de certains objets, par le fait qu'ils soient inanimés, par leur fixité, par celle d'un certain nombre de leurs propriétés. Il s'agit par exemple de la masse pour un objet du monde matériel physique, du moi pour un objet du monde vivant. Prenons l'ensemble des triangles du plan euclidien : c'est une famille d'objets, vue comme globalement comme un objet, ici fixe. Le fait que les hauteurs, bissectrices, etc, de chaque élément de cette famille soient concourantes est une propriété invariante de cette famille, de cet objet global.

La permanence spatio-temporelle d'objets et de phénomènes se manifeste par celle de leurs propriétés internes, plus ou moins bien révélées par l'apparence de ces objets et phénomènes, leur morphologie extérieure. Cette apparence est plus ou moins immédiate, nous avons pu petit à petit créer des outils divers permettant de voir selon le degré de petitesse ou d'éloignement des objets et des phénomènes.

L'apparence première est celle de la forme. Comme nous le montrent l'observation des représentations naturelles que sont les ombres, l'une des premières caractéristiques de la forme est celle des proportions (ou encore rapports) existantes entre ses divers éléments.

L'une des premières qualités d'une représentation sera donc le respect de ces proportions. L'énoncé attribué à Thalès exprime le fait que la proportion entre deux éléments de la forme originelle est égale à celle entre leur représentation respective. Tout ceci s'accomplit de manière instantanée, et se maintient donc dans un cadre statique ou de déplacement à une vitesse uniforme. À cela, il faudra ajouter l'influence ou encore les modifications des conditions d'observation sur l'établissement des proportions. Ainsi, par exemple, toujours dans un cadre statique, le regard porté sur les éléments d'un objet dans deux directions différentes mais fixes, conduit-il à faire intervenir, à travers la constance de ce qu'on nomme le birapport, la proportion invariante entre ces deux directions d'observation.

Thalès et Pythagore sont pratiquement contemporains, et c'est de leur temps que la notion mathématique de proportion a été érigée en concept universel, que

les rudiments d'une théorie des proportions furent élaborés. Avec Archimède, environ trois siècles et demie plus tard, apparut, en rapport avec la proportion, les premiers éléments de la théorie de l'équilibre des forces, équilibre qui assure la stabilité. Le terme grec de $\sigma\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\rho o\varsigma$ convient parfaitement à la description de cette situation.

De manière générale, l'observation de symétries dans l'apparence et la structure révèle la présence de forces internes en suffisante harmonie pour permettre une certaine invariance spatio-temporelle. D'où l'usage heureux et si fréquent en physique de théories s'appuyant sur la notion de symétrie.

Il est une symétrie primitive, celle qui correspond à la présence des deux seules forces, opposées. Elle correspond à une forme de gémellité dans la nature, et conduit à envisager pour tout objet, au moins potentiellement, l'existence d'une sorte de double, de jumeau, mais doté d'une orientation opposée, tout au moins différente. Dans le monde physique, l'annihilation entre un premier sujet et un second appartenant à la famille des doubles advient dès leur rencontre si leurs supports sont différents.

Dans cette situation d'équilibre parfait entre deux acteurs, il est indifférent de se placer du point de l'un ou du point de vue de l'autre. Une permutation entre les deux actants, correspondant à une symétrie parfaite entre ces deux actants, laisse invariant le phénomène global. C'est la raison pour laquelle on assimile la permutation à une symétrie.

La généralisation de cet type de situation d'équilibre parfait entre n acteurs conduit d'abord à la création de cet ensemble de mouvements que sont les permutations entre eux des n éléments d'un ensemble quelconque. La codification de trois des propriétés élémentaires de ces permutations (une permutation de principe, dite neutre, qui laisse invariants tous les éléments, le fait qu'à toute permutation donnée correspond une permutation symétrique qui ramène les éléments initialement permutés à leur situation de départ, le fait qu'on puisse composer entre elles les permutations) conduit à la définition générale d'un groupe, ensemble de transformations qui satisfait aux trois propriétés énoncées ci-dessus.

Les invariances par des symétries effectives par rapport à des « axes de symétrie » de dimension 1 (comme les droites) ou supérieure, par des déplacements divers comme des translations, des rotations, le long de chemins qui reviennent à leur point de départ, les invariances qui conservent les énergies comme les longueurs appelées encore métriques, comme des « quantités de mouvement », sont les constituants principaux des groupes.

Comme les représentations, pour être un tant soit peu fidèles, doivent respecter les propriétés de stabilité des objets sources, on ne sera pas étonné, dans leur formulation et pour nombre d'entre elles, par la référence fréquente aux groupes ou sous-groupes de symétries attachés à ces objets et par leur présence (comme dans les fonctions automorphes et modulaires).

Comme on l'a déjà noté, les périodicités d'apparition d'éléments au sein d'un objet, au cours de phénomène soulignent la présence d'invariances internes, de cycles stables de répétition de mécanismes, caractérisés donc par des groupes à structure cyclique.

L'apparence ne met pas seulement en évidence la présence de symétries plus ou moins parfaites et accusées, associées, dans un premier temps, avec la stabilité de l'objet vu dans sa globalité.

Elle attire également le regard sur le contraire de la globalité, sur le local le plus local possible dénommé la singularité, déjà rencontrée.

La singularité [3] est un élément parmi les plus importants d'une morphologie figée ou animée : elle est d'abord isolée – l'ensemble des singularités forme un ensemble de mesure nulle. Caractérisée par des propriétés d'extrémalité ([7], §2.4), elle est visible et attire le regard.

C'est également à partir des singularités que naissent et se déploient les formes et les mouvements : elles jouent un rôle de centre organisateur tant sur le plan structurel que fonctionnel, associé au fait que les potentialités de transformation locale y sont particulièrement élevées, au contraire de ce qu'il advient aux points réguliers.

Les singularités sont donc également associées à des phénomènes de bifurcation [5] [6] au sein desquels apparaissent des structures et des cheminements tout à fait nouveaux.

Par exemple, les valeurs des éléments d'un groupe de symétries peuvent dépendre de paramètres évoluant dans le temps. Il se peut que des symétries s'évanouissent pour certaines de ces valeurs : elles ont le statut de singularité.

Les valeurs de paramètres peuvent ainsi former des ensembles importants dont certaines parties sont associées à des types de formes et de comportement particuliers. Lorsqu'on atteint leurs bords, les limites de ces parties, alors apparaissent de manière plus ou moins immédiate des changements de morphologies et de comportement plus ou moins profonds. On désigne parfois par le nom d'*ensembles de bifurcation* ou d'*ensembles de catastrophe* ces ensembles de valeurs des paramètres en lesquels adviennent ces changements remarquables – qui peuvent parfois s'apparenter à des métamorphoses. Lorsqu'un tel ensemble important de paramètres a la structure de groupe, forme donc un groupe, ces parties significatives possèdent également en général la même structure de groupe, et forment des sous-groupes du groupe global. Ils portent alors le nom de sous-*groupes de Galois* du groupe global.

Les phénomènes d'évolution caractérisés par la croissance de certaines structures, de certaines morphologies, de certaines valeurs apparaissent en mathématiques sous différents vocables, comme ceux de déploiement, d'adjonction

Principe de stabilité spatio-temporelle	
associé à la **symétrie**	
	groupe
singularité, ensemble singulier	**cycle, période**
obstruction, bifurcation	
ensemble de bifurcation, de catastrophe	**groupe de Galois**
engendre **déploiement, adjonction, extension**	

Tableau 5

ou d'extension ([7], §2.6), notamment pour ce dernier terme en théorie des nombres et en logique.

De tels phénomènes sont parfois modifiés voire contrecarrés par l'apparition et la présence, à certains stades de l'évolution, de structures particulières qualifiés d'*obstructions*, de valeurs de paramètres induisant des ruptures de symétrie et d'apparence, des bifurcations de comportement. Ils correspondent aux ensembles de bifurcation évoqués ci-dessus.

Le tableau 5 ci-dessus reprend l'essentiel des notions associées au principe de stabilité.

2.6

Terminons cette section sur des considérations qui concernent certaines propriétés générales des objets mathématiques. Elles ont des conséquences heureuses, notamment méthodologiques, sur la manière de traiter les problèmes.

Il existe a priori plusieurs manières de représenter le même objet, notamment en fonction de l'outil de représentation utilisé. À chaque manière de représenter est associée un regard original et la mise en valeur sinon la découverte d'une propriété particulière, peut-être inobservable par tout autre mode de représentation.

Un observateur vous regarde, ainsi que votre image dans un miroir : l'observation dans le miroir complètera les informations qu'il a de vous par l'observation directe de votre personne. Le physicien-mathématicien dira que votre image et vous-même êtes en *dualité*. Modifiez les propriétés du miroir, vous obtenez une infinité de dualités possibles. Mais il est clair que certaines modifications seront moins utiles et pertinentes que d'autres.

dualité	**analogie**	**approximation**	**extrémalité**

Tableau 6

Prenons maintenant un cerceau roulant sur une surface plane. Le plan vertical dans lequel se trouve le cercle coupe le plan horizontal sur lequel il roule selon une ligne droite. Cette ligne n'a qu'un point commun avec le cercle, celui où ce cercle touche le plan sur lequel il roule. Autrement dit, à chaque point du cercle correspond une droite particulière appelé sa tangente en ce point. On peut donc décrire le cercle soit par l'ensemble de ses points soit par l'ensemble de ses droites tangentes. La correspondance entre l'ensemble des points du cercle et l'ensemble de ses lignes tangentes est biunivoque : à tout point du cercle correspond un seule droite, et à toute droite correspond un seul point du cercle. Lorsqu'une telle bijection entre représentations existe, on dit qu'elles sont *duales* l'une l'autre.

Dans le cas présent, à chaque point c du cercle est associée une droite, un élément géométrique visuel, mais aussi, dans sa représentation numérique, une fonction linéaire $f_c(x) = a_c x + b_c$ qui décrit la droite passant par le point c. Notons qu'au point le plus élevé du cercle, caractérisé par des valeurs particulières d'angle ou des coordonnées de ce point, correspond une fonction linéaire également particulière.

Cette correspondance entre espaces de fonctions et formes, leur propriétés locales, est largement utilisée car elle permet de transposer a priori des propriétés d'une représentation à l'autre. Démontrées dans l'un des système de représentation, on est alors assuré de leur existence dans un autre système de représentation adapté. Les mathématiciens disent parfois avec juste raison qu'ils procèdent par *analogie*.

Le monde physique, infiniment grand ou petit, nous reste inaccessible. Déjà nul ne sait ce qu'est vraiment un électron, alors savoir ce qui se passe au niveau des longueurs de Planck[3], de l'ordre de 10^{-35} cm, est non moins mystérieux. En faisant l'hypothèse de stabilité des constitutions des éléments au fur et à mesure qu'ils deviennent plus petits, les mathématiciens ont établi des représentations

[3]Comme l'aurait montré récemment Robitaille P.-M., Crothers S. J., "The Theory of Heat Radiation" Revisited : A Commentary on the Validity of Kirchhoff's Law of Thermal Emission and Max Planck's Claim of Universality, Progress in Physics, v. 11, p.120-132, (2015),http://www.ptep-online.com/index_files/2015/PP-41-04.PDF, les « constantes » de Planck pourraient ne pas avoir le caractère universel qu'on leur attribue aujourd'hui. Par ailleurs reste posée la valeur de l'emploi du calcul intégral en physique de l'infiniment petit...

sans nul doute approximatives de la plupart des objets et des phénomènes. Le procédé formel conserve son caractère opérationnel tant que l'on ne va pas trop loin dans l'approximation.

La plupart des objets que nous considérons présentent des caractères de finitude. Pour une direction d'observation déterminée, cette finitude se traduit par le relevé de positions et de valeurs extrêmes impossibles à dépasser. Ces propriétés d'*extrémalité* leur confèrent la caractéristique de singularité. La technique systématique qui consiste à dégager les éléments et situations extrêmes est toujours riche d'enseignement.

2.7

On pourra regretter l'absence, dans ces tableaux, de très nombreux termes associés à l'approfondissement des notions présentées et dont l'intérêt est majeur. Mais il pourra arriver que l'un de ces termes soit évoqué de manière pertinente au cours de tel ou tel exposé. On pourra donc à l'occasion, par exemple, dire un mot de l'homotopie et des groupes d'homotopie, ou parler de l'inversion et de son lien avec la symétrie, ou encore plus simplement parler de perspective. Il faut reconnaître que les terminologies et faits intermédiaires liés par exemple à la théorie des nombres, à l'algèbre la plus développée, se prêtent mal à l'illustration esthétique, alors que, pourtant, l'obtention des solutions d'équations polynomiales offre au regard un champ sans fin de formes chatoyantes aussi inattendues que fascinantes.

3 Quelques commentaires sur le contenu de deux exposés

Ces exposés, d'une heure au plus en principe, ont été faits devant de jeunes élèves, âgés de six ans au moins, de quinze ans au plus. Les adultes présents étaient non moins intéressés. Ne pourrait-on en déduire que ces exposés peuvent toucher n'importe quel public ?

Les power points associés permettent d'accéder aux points essentiels de ces exposés. Mais bien sûr, il a pu arriver que, compte tenu du public, de ses réactions, de l'inspiration du moment, d'autres considérations, notamment d'ordre général et « philosophique », aient pu être insérées.

Voici une brève évocation de leur contenu à travers des mots-clés figurant dans le texte des power-points. Cette lecture d'une sorte de dictionnaire à la Prévert va sans doute en désarçonner, voire en inquiéter plus d'un. Peut-être, après avoir pris connaissance de la fin du texte de cette section, se sentira-t-il quelque peu rassuré.

« Bonne Année » : boules, sphères, cônes, cercle, projection stéréographique, nœud, déformation, homotopie, singularité, épicycloïde, cube, dimension, n-

cube, face, hypercube et évaluation du nombre de ses faces, nœud de trèfle, projection, poids d'une projection, orientation, dextrogyre, levogyre, ruban de Möbius, cylindre, base, fibre, espace fibré, breather, bouteille de Klein, pavage, disque hyperbolique, surface de Boy.

Énoncé important : rareté des points singuliers.

« Pâtisserie Mathématique » : millefeuille, parallélépipède, cube, prisme, sphère, point singulier, boule, dimension, courbe, proportion de Thalès, cylindre, cône tangent, transformation conforme, tore, nœud, nœuds de trèfle, feuille épaissie ou plaque, vecteur, déplacement, champ de vecteurs, structure de groupe, transformation du boulanger, pavage, autosimilarité, hyperbole, polygone régulier, brioche de Boy.

Énoncés importants : possibilité de feuilleter les domaines, projection stéréographique avec éléments de démonstration, théorème de Thalès (version dynamique récente), il existe 17 pavages cristallographiques du plan, le plan peut être pavé par n'importe quel quadrilatère (démonstration).

Ces exposés présentent des caractéristiques communes.

3.0

Ce ne sont pas des cours traditionnels dont le contenu doit être appris, ce qui est retenu de ce contenu n'est pas soumis à la vérification par l'interrogation et l'examen.

3.1

Le premier trait de ces exposés est leur caractère gai : couleurs chatoyantes, humour, conversation détendue, de l'inattendu dès le titre, on met et on est en confiance.

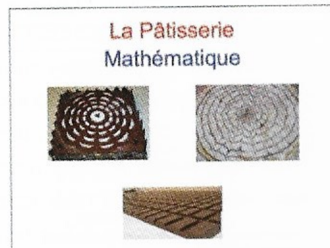
Voyez ces premières trois images de l'exposé « Pâtisserie Mathématique » qui s'adresse déjà à des adolescents :

ou bien ces quatre premières diapos de « Bonne Année », conçu pour un public plus jeune :

Le ton est donné dès le premier contact avec l'auditoire.

3.2

Une autre des caractéristiques générales de ces exposés vient du fait qu'ils s'adressent à un public finalement ignorant de ce que sont les mathématiques. D'où la présence de petits rappels évidemment aussi simples et courts que possible sur ce que sont les mathématiques, ce que font les mathématiciens de manière à dissiper les craintes, chasser les appréhensions, les fausses définitions qui suscitent les rejets. Le contenu de ces lignes est souvent largement enrichi

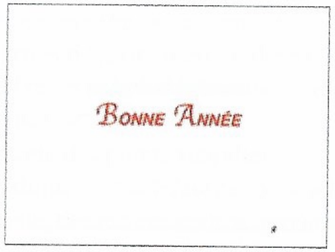


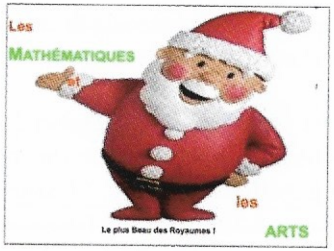
au cours des exposés par l'énoncé de considérations moins élémentaires sur la manière dont se déploie l'univers mathématique.

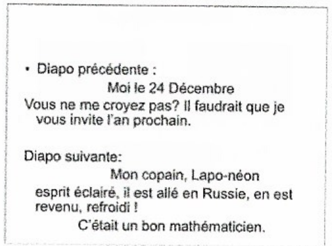
Les mathématiques, c'est quoi ? Retenez ceci : tout simplement une manière un peu élémentaire, mais efficace, de décrire et de représenter les traits essentiels du monde qui nous entoure. Elles facilitent la compréhension et la prévision.

Les mathématiciens le démontrent, c'est-à-dire savent expliquer pourquoi il en est bien ainsi. Un énoncé que les mathématiciens démontrent est appelé un théorème.

Les mathématiciens recherchent l'universalité de leurs conceptions et de leurs affirmations. Ils généralisent.







• On rencontre deux types de géomètres : les complets, et les incomplets ou intrinsèques ou *topologues*.

• Les complets prennent en compte, non seulement la forme, mais aussi les données métriques des objets, les distances d'un point à un autre.

• Les topologues ne s'y intéressent pas a priori, ce sont des propriétés plus intrinsèques, plus fondamentales qu'ils étudient.

• Ils recherchent des propriétés invariantes par déformation.

La propriété essentielle du cercle, pour le mathématicien qui ne s'intéresse guère aux questions de longueur, de distance, est la suivante – il est appelé un topologue : si je me promène sur le cercle, en partant d'un point quelconque du cercle, je reviens à mon point de départ.

3.3

La troisième caractéristique de ces exposés est de faire connaître à l'auditoire les divers objets parmi les plus basiques que manipulent les mathématiciens, notamment en montrant combien leur présence est familière autour de nous. Par exemple, dans « Bonne Année », on montre des personnages amusants, des bâtiments et des tableaux célèbres, ainsi que différents objets mathématiques, puis on incite les auditeurs, en les guidant, à reconstruire les objets courants à l'aide des objets mathématiques mises en exergue. Les formes mathématiques correspondantes acquièrent alors une réalité physique : elles s'impriment aussitôt dans l'esprit des auditeurs. Le vocabulaire nouveau, la signification de ses termes sont immédiatement assimilés. On procède de même dans « Pâtisserie Mathématique », faisant appel au ressort supplémentaire de notre gourmandise naturelle.

3.4

On approfondit un peu la connaissance de ces objets. Il s'agit d'abord de montrer la présence de propriétés universelles qu'ils partagent, propriétés essentielles dont on ne prend pas conscience à la première vue, comme la présence au sein de tous ces objets de singularités. Les éléments de texte concernant ces singularités et qui figurent sur les diapositives sont très succincts, ils ne rendent pas compte de tous éléments d'information donnés à l'auditoire au sujet de ces singularités. Au moins voit-on apparaître l'énoncé général de leur rareté.

L'emploi d'animations commentées, par exemple ici

http://www.josleys.com/gfx/Danse_03.mov,

stimule l'attention et permet de mieux faire pénétrer le message pédagogique. Là encore, des commentaires, faits oralement, concernant les propriétés des mouvements n'apparaissent pas dans les textes, montrant notamment la présence combinée de translations et de rotations et illustrant le théorème général d'Aristote-Liouville énoncé à l'auditoire[4].

L'emploi des images permet d'introduire et de faire voir rapidement des propriétés significatives des représentations des objets mathématiques, notamment par projection : la projection parallèle qui conduit à l'énoncé du théorème de Thalès sur la conservation des rapports métriques des longueurs, la projection stéréographique qui accompagne la conservation des distances angulaires.

3.5

Cette dernière apparaît dans les deux exposés, mais le second, « Pâtisserie Mathématique », est d'un niveau plus élevé que « Bonne Année » : des démonstrations ou leurs esquisses sont présentes. Mais on n'entend pas les introduire ex-abrupto, au contraire on essaye d'en montrer les origines, les mobiles. En ce qui concerne par exemple la projection stéréographique, on fait participer l'auditoire au déroulement d'une démarche très hypothétique de la pensée du créateur de cette projection, qui aurait porté son attention à l'ombre d'une sphère éclairée par le soleil situé sur l'axe nord-sud de la sphère, rapprochant la source de la projection conique jusqu'à la placer au pôle nord de la sphère.

Par cet exemple, on entend faire transparaître non seulement la démarche de la pensée qui conduit à la découverte et à la mise en forme d'un énoncé, mais aussi et d'abord l'environnement physique qui a permis, suscité la mise en œuvre de cette démarche. Dans un autre texte, un conte intitulé « Le jardin enchanté » (http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/pythagore.pdf), on décrit également une suite de démarches de pensée conduisant à l'énoncé du théorème de Pythagore, cette fois liées à un environnement scientifique et à un environnement social situés dans leur époque.

Autrement dit, cet autre trait caractérise les exposés : ils s'efforcent quand les possibilité sont présentes, de faire revivre le développement historique des mathématiques dans ses aspects les plus divers.

3.6

Les exposés offrent aussi la possibilité de comprendre les mathématiques, par les idées universelles qu'elles portent, comme un outil d'intelligibilité qui va au-delà du simple monde physique d'où elles sont issues, mais également comme

[4] L'énoncé de ce théorème était présent dans l'esprit de Platon, voir par exemple *Les Lois*, V, 747a.

une source de modestie et de prudence. Un exemple est donné par les premiers commentaires qui accompagnent l'animation

http://www.josleys.com/gfx/Danse_03.mov.

La leçon à tirer de ce phénomène :

• Ne prenez jamais l'Ombre, l'Apparence pour
la Réalité, le Nombre pour le Fait

Je voudrais dire ici succinctement combien toute formation de pensée, celle par les mathématiques entre autres, par les démarches routinières de pensée et les œillères qu'elle peut finir par imposer, peut conduire à limiter notre champ de compréhension du monde.

3.7

Le contenu des exposés est en fait assez riche, une heure ne suffit nullement pour parcourir en le commentant le contenu des power-points. Il arrive que soient présentées des notions qui ne figurent pas dans les tableaux donnés dans la section précédente. Cette diversité, même si elle pourrait lasser les moins attentionnés, permet de mieux faire entrevoir la richesse de l'univers mathématique.

Si le thème des feuilletages n'est abordé que dans l'exposé consacré à la pâtisserie, celui des pavages plans est présent dans les deux exposés.

Ne figure pas dans l'écrit des power-points cette motivation physique à l'étude de ces pavages, mais donnée oralement : étudier la manière dont la Nature remplit l'espace. Les cristallographes ont apporté une première réponse à cette question, et la cristallographie a joué un rôle moteur dans le développement de la théorie des groupes. Curieusement, on ne fait apparemment presque jamais, dans les ouvrages sur les pavages, destinés aux enfants ou non, le rapprochement motivant entre les pavages et le problème physique originel : un pavage plan se décompose en couches de « cristaux » plans. Une telle couche est l'équivalente d'une feuille épaissie d'un feuilletage. Une telle feuille épaissie est l'équivalente d'un couche lisse de cristaux.

Le sujet des motifs plans ou non (polygones, polytopes) qui constituent les pavages, le thème des pavages eux-mêmes, offrent la possibilité illimitée de concevoir des images de grande beauté, et aussi d'aborder les outils mathématiques techniques qui permettent leur construction, et d'abord la notion de symétrie. Des animations diverses en montrent les divers usages possibles : celle de Jos Leys qui allie symétrie, topologie et musique

http://www.josleys.com/Canon/BachCanonL_final.mov pour le plus grand plaisir de tous les auditoires. Pour ces excellentes raisons, il n'est sans doute guère de cursus scolaire qui aujourd'hui ne fasse pas mention des pavages et de leurs motifs.

3.8

La présence d'animations est une autre propriété qui caractérise l'exposé « Bonne Année ». Les animations créent à la fois des moments de rupture apaisants dans le rythme de l'exposé mais contribuent aussi à fixer l'attention. On observera que ces animations possèdent l'intérêt de mettre en synergie plusieurs domaines, de montrer de manière quasi simultanée des propriétés ou des faits relevant apparemment de spécialités différentes. Par rapport aux situations où l'on ne se penche que sur une seule propriété, l'enrichissement est possible à condition de s'attarder sur l'animation, la reprendre pour en montrer toutes les facettes, les détailler, et analyser les rapports qu'elles entretiennent entre elles.

D'une manière générale, les animations sont en nombre trop insuffisant. Deux raisons peuvent expliquer ce fait : d'une part, concevoir une animation qui réponde à certains objectifs est parfois impossible, et d'autre part la réaliser demande un savoir-faire et des qualités peu fréquentes. En l'occurence, ce fut une chance d'être en relation et en connivence avec Jos Leys dont la renommée n'est plus à faire.

C'est naturellement l'évocation d'une animation

http://www.josleys.com/gfx/Tore_CB_01.mov

qui conclura ce dernier paragraphe. Elle a l'avantage de nous montrer un objet mathématique, un tore savamment teinté, couleur grenat, un feuilletage qui lui est associé avec ses singularités, des architectures célèbres, les imposantes arènes romaines de Nîmes et de Vérone que ne manquent pas d'aller admirer les touristes du monde entier, une notion mathématique très importante, la déformation. Déformation qui, au voisinage d'une singularité conduit à des bifurcations, à la création de nouvelles morphologies.

3.9

Le dernier trait caractéristique de ces exposés est évidemment la présence de très belles images, lumineuses, scintillantes lorsqu'elles apparaissent sur les écrans d'ordinateur. Nous sommes à cent lieux des cours ex cathedra où l'on reste figé face à des tableaux qui furent noirs, aujourd'hui à la teinte plus douce.

Dans les mains d'artistes talentueux, les objets mathématiques s'incarnent, révèlent leurs formes surprenantes à travers les jeux de lumière, et comme on le découvre par exemple dans les compositions des peintres cubistes, ces mêmes

objets mathématiques savamment placés et combinés entre eux deviennent les constituants expressifs de représentations fascinantes pleinement chargées d'humanité.

Ces exposés sont donc d'une autre nature que ceux que l'on rencontre dans les institutions universitaires standard. Il faut sans doute les comparer à des spectacles analogues par exemple à ceux du cirque, des spectacles féériques où l'étrangeté se marie avec les richesses de lumière, conduisant à créer une sorte d'atmosphère poétique comme celle qui imprègne toute l'œuvre de Chagall.

Spectacles que l'on doit revoir, spectacles non innocents, spectacles qui suscitent la réflexion, qui, avec leur cortège de notions nouvelles, peuvent laisser des marques indélébiles dans la mémoire, autre avantage pédagogique.

References

L'auteur est seul présent dans cette bibliographie. Le lecteur, ayant pris connaissance des textes cités, sera peut-être indulgent à son égard.

[1] C.P. Bruter, *Comprendre les Mathématiques*, Odile Jacob, Paris, 1996 [Edition portugaise : Compreender as matematicas, Instituto Piaget, Lisboa, 2000]

[2] C.P. Bruter, *Energie et Stabilité* http://arpam.free.fr/ESC.pdf

[3] C.P. Bruter, La notion de singularité et ses applications, *Revue Internationale de Systémique*, 3, 4, 1989, 437-458 http://arpam.free.fr/Sing.pdf

[4] C.P. Bruter, Géométrie et Physique : Invariance, Symétrie et Stabilité, *Qu'est-ce que comprendre en physique ?* (M. Espinoza Ed.), Strasbourg, 2000, 36-43 http://arpam.free.fr/GP.doc

[5] C.P. Bruter, Bifurcation and continuity, *Dynamical Systems, A Renewal of Mechanism* (S. Singer, D. Fargue, G. Lochak Ed.) World Scientific, Singapore, 1986, 70-74 http://arpam.free.fr/Bifurcation and continuity.pdf

[6] C.P. Bruter, Bifurcation, un concept interdisciplinaire Interdisciplinarité scientifique, *Actes du 114e Congrès des Sociétés Savantes*, Edition du CTHS, Paris 1992, 59-71 http://arpam.free.fr/Bifurcation un concept interdisciplinaire.pdf

[7] C.P. Bruter, *Sur la nature des mathématiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1973.

[8] C.P. Bruter, Bonne Année, http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/bonneAnnee/Bonne_Année.pdf

[9] C.P. Bruter, Pâtisserie Mathématique, http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/patisserie/PM1-2-3-4.pdf

[10] C.P. Bruter, "Mathematics, Art, Pedagogy" in *Aesthetics and Neuroscience (Scientific and Artistic Perspectives)*, Z. Kapoula, M. Vernet (Eds.), Springer, 2016, pp. 165-172, http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/AMP1-2.pdf

C.P. Bruter
bruter@me.com
bruter@u-pec.fr