

# SECONDE PARTIE

## VUE PANORAMIQUE SUR LA PRÉSENCE DES MATHÉMATIQUES DANS LES ŒUVRES ARTISTIQUES À TRAVERS DEUX UNIVERSELS DE L'ART DÉCORATIF

### INTRODUCTION GÉNÉRALE

Il ne semble pas que les spécialistes de l'histoire de l'art, les critiques, aient jamais attiré l'attention de leurs lecteurs sur la présence d'universaux dans la décoration. Pourtant, deux d'entre paraissent s'imposer à l'évidence : il s'agit de la présence du motif spirale comme premier universel ; le second universel est celui de la création et de la réalisation constante de pavages.

L'explication de la présence de ces deux universels repose d'abord sur la stabilité particulièrement marquée des phénomènes de la nature auxquels ils sont associés. Elle repose également sur la sensibilité de l'être humain à ces grands phénomènes, sur son activité et ses capacités de représentation.

Le premier phénomène est celui du mouvement. L'un des mouvements parmi les plus stables et importants se trouve être celui en forme de spirale : il donne naissance à une représentation récurrente dans l'art décoratif.

Une seconde question d'importance est celle du contenu de l'espace, de la manière stable dont il est constitué, et se constitue. La création de pavages est une façon plus ou moins consciente d'illustrer cette question, de suggérer une voie de réponse.

Les chapitres qui suivent vont quelque peu reprendre, développer et étayer ces points de vue.

### **I. Un mouvement primordial, un universel dans la décoration ou Les Spirales dans la Nature, les Arts, et les Mathématiques**

#### **I.1 Préliminaire : présence du mouvement spiral**

On a toujours fait, au moins depuis Aristote (384-322), la distinction entre l'inanimé et l'animé. Nous avons, dans l'immédiat, une meilleure connaissance de l'inanimé, de l'objet fixe, qui se laisse observer plus longtemps. Nos connaissances sur l'inanimé ont été beaucoup longues à s'établir ; ce sont elles pourtant qui nous auront permis d'accomplir les plus grands progrès sur le plan technologique et sur le plan de la compréhension, car le figé n'est qu'une

singularité stabilisée au sein de l'évolution. C'est donc du mouvement que je vais parler d'abord.

Selon Aristote encore, il existe dans l'univers deux mouvements fondamentaux, le *rectiligne* et le *circulaire*. Ils engendrent, selon l'expression du Stagirite, des mouvements *mixtes*. On doit au mathématicien Joseph Liouville, qui vivait au XIX<sup>ème</sup> siècle, la démonstration de cet énoncé dans le cadre général des espaces multidimensionnels : tout mouvement local est la composition d'un mouvement rectiligne et d'un mouvement circulaire. Mais c'est dans l'œuvre d'Aristote que je viens de citer, dans le tome VIII du traité qu'il consacre à la Physique, que ces faits sont mentionnés pour la première fois dans des écrits. Aristote ajoute que le circulaire est nécessairement antérieur au rectiligne. Les raisons qu'il avance peuvent nous paraître naïves ou spécieuses, elles répondent en tout cas à une intuition physique profonde.

Accorder la primauté au mouvement circulaire implique sa plus grande présence dans la composition du mixte. C'est ce que confirme l'observation du monde physique: une trajectoire complète n'est qu'exceptionnellement rectiligne, ce sont tout au plus des portions de trajectoires rectilignes que l'on observe. Génériquement, le mouvement local est mixte.

En dehors du circulaire et du rectiligne fondateurs, existerait-il, dans notre univers physique, des formes de trajectoires qui apparaîtraient plus fréquemment que d'autres, qui seraient sans doute plus significatives car plus proches de la réalité physique ?

Il en est une qui vient rapidement à l'esprit, et cela parce qu'elle présente des caractères d'universalité et de stabilité tout à fait remarquables, qui en font l'un des archétypes des formes du mouvement : c'est la trajectoire de type spirale, associée à un mouvement de création et de façonnage qui vient s'immobiliser au moment où le stade final est atteint. Ce type de trajectoire est présent dans tous les règnes de la nature. Nous le rencontrons d'abord au sein de l'univers physique primordial, par exemple dans cette image obtenue récemment de la galaxie du Tourbillon :



ou dans celui-ci, pris au dessus des îles Aléoutiennes de l'Alaska, et qui montre des mouvements tourbillonnaires de nuages :



Cette forme de trajectoire, on la retrouve dans le dessin des coquillages, des cornes de divers quadrupèdes, des appendices allongés de certains singes, des vrilles des vignes, des enroulements de feuilles, de l'ADN, de la cochlée etc. Elle nous est familière, naturellement conduite par le mouvement de rotation spontané du poignet.

Aussi, l'artiste qui est instinctivement conduit à représenter les phénomènes de la nature parmi les plus insistants, a-t-il fait figurer cette forme primordiale dans ses décors, depuis les temps les plus reculés.

Un mot ici sur la représentation par les mathématiciens des mouvements fondamentaux, le rectiligne et le circulaire.

Les *mouvement rectilignes*, appelés également des *translations (rectilignes)*, sont représentés par les nombres habituels dits *réels*.

Leur description repose en partie sur la fait que, sur la ligne, on peut se déplacer selon deux directions opposées.

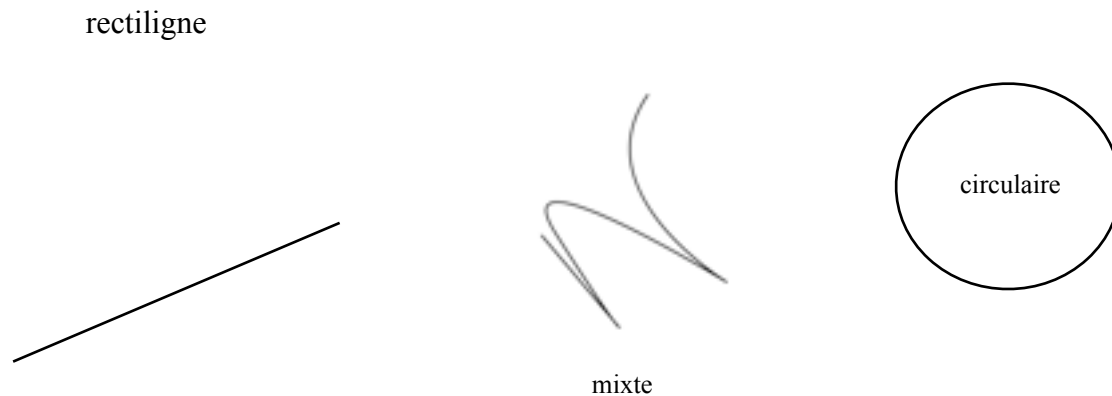
L'ensemble des rotations sur cette ligne ne comprend que deux éléments : le premier appelé l'identité, noté I, ne change pas la direction dans laquelle on se déplace, de sorte que,  $\rho$  (rho) désignant une translation,  $I(\rho) = \rho$ .

Le second élément a pour effet d'inverser le sens du déplacement. On le note  $-I$ , et on convient de noter par  $-\rho$  l'effet de cette rotation sur la translation  $\rho$  :  $-I(\rho) = -\rho$ .

Notons que l'on peut voir la translation comme une *dilatation*, une *homothétie*, dans la direction du mouvement.

Les mouvements circulaires premiers que l'on a considérés s'effectuaient dans le plan. Les plus simples, les plus fondamentaux d'entre eux sont les mouvements de *translation circulaire* réguliers sur cette figure parfaite, le cercle de rayon 1, dont le centre est centre de symétrie de cette figure. La valeur  $\theta$  (théta) de cette translation s'appelle aussi la valeur de l'*angle* correspondant à cette rotation. Ce  $\theta$  est aussi un nombre réel.

La rotation de  $90^\circ$  dans le plan se note  $i$  depuis Euler. On note également par  $i$  l'effet de cette rotation sur le point du cercle noté 1 :  $i(1) = i$ . La succession de deux rotations de  $90^\circ$ , soit une rotation de  $180^\circ$ , nous amène sur le point  $-1$  du cercle :  $i(i(1)) = i^2(1) = -1$  de sorte qu'on écrit  $i^2 = -1$ . Une rotation de 3 fois  $90^\circ$  nous amène en  $-i$ , et celle de  $360^\circ$  nous ramène à notre point de départ 1.



Un mouvement mixte élémentaire  $z$  résulte de la composition d'une dilatation  $\rho$ , et d'une rotation  $\theta$  (dans un espace a priori quelconque) :  $z = (\rho, \theta)$ . Un tel mouvement est appelé une *similitude*.

Lorsque le mouvement mixte s'effectue dans un plan, le symbole  $z$  porte le nom de *nombre de Chuquet(-Cardan)*, ou encore de *nombre complexe*. On l'écrit souvent souvent sous la *forme abrégée*  $x + i y$ . Sa forme non abrégée est la suivante  $x u + y i(u)$ , où  $u$  désigne le vecteur unitaire de l'axe des nombres réels.

On soulignera le côté exagéré et malencontreux, introduit et regretté par Gauss lui-même, de l'emploi de l'adjectif complexe. Mais, étant donnée leur signification physique, le mouvement générique local est mixte, ces nombres élémentaires sont très souvent employés par les physiciens, à juste titre, et avec succès.

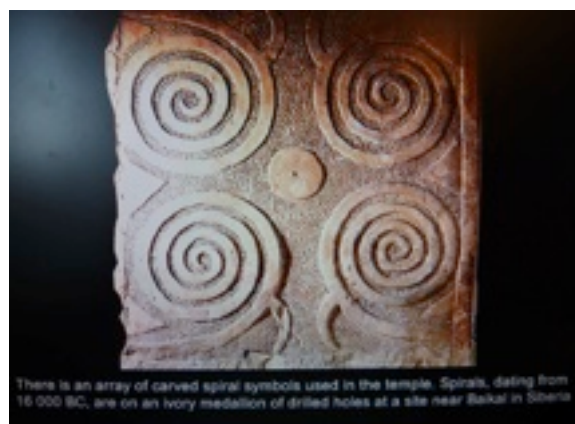
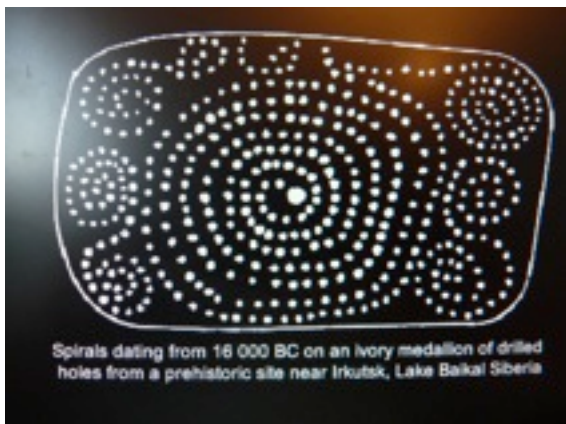
Lorsque le mouvement mixte s'accomplit dans l'espace usuel (dimension 3), le nombre qui le représente est appelé un nombre de Hamilton, plus communément un *quaternion*. Son emploi dans la description physique du monde est alors naturel dès que l'on quitte la dimension d'espace 2.

Plus généralement d'ailleurs, un *nombre élémentaire* est le mixte dans un espace de dimension quelconque de dilatations d'intensités diverses dans les différentes directions de l'espace, couplées avec des rotations dans ce même espace. On consultera sur ce sujet :

<http://arpam.free.fr/Du%20nouveau%20...%20Quadrature.pdf>

## I.2 Les spirales dans le monde l'art

La Bradshaw Foundation s'emploie à mettre à jour les œuvres d'art du passé lointain de nos sociétés. Les gravures rupestres témoignaient certes des capacités des hommes à produire des figures stylisées, d'animaux familiers pour l'essentiel. Mais les deux gravures sur ivoire suivantes, parmi les plus remarquables de notre point de vue, témoignent de la rationalité dont les hommes faisaient preuve. Voici des images de ces deux objets, façonnés il y a près de 18 000 ans, et découverts en Sibérie, près du lac Baïkal :



Ces œuvres sont emblématiques: présence de la symbolisation de trajectoires fondamentales sous la forme de spirales et de doubles spirales, symétrie, motif répété, pavant l'espace. Elles portent en elles de manière potentielle, elles symbolisent, sur le plan artistique, toute l'histoire et le contenu du décor, sur le plan physico-mathématique, toute l'histoire et le contenu des recherches sur la description des mouvements, et sur les manières dont la Nature remplit l'espace.

On peut sans doute voir dans la partie centrale du premier objet, en arrière-plan, la représentation d'une assemblée réunie autour d'un chef, mais le caractère spiralé de la représentation, la symétrie qui l'accompagne sont

l'expression d'une rationalité plus orientée vers l'abstraction, mais où néanmoins se déploie une imagination créatrice.

Le second médaillon se singularise également par sa plus grande perfection artisanale, une plus grande recherche dans le jeu des symétries, ici croisées. Mais on voit également ici, et surtout, un domaine occupé par des formes identiques, à quelque chose près. De manière implicite, l'artiste, l'homme aborde une problématique essentielle, déjà traitée par Platon : comment la nature remplit-elle l'espace ? Une vision peut-être encore naïve et illusoire donne à penser que l'espace serait entièrement rempli de particules identiques, en quantité incommensurable. La fabrication de pavages des sols est une expression simplifiée de cette problématique et de sa solution. C'est dans un second temps que cette question sera abordée.

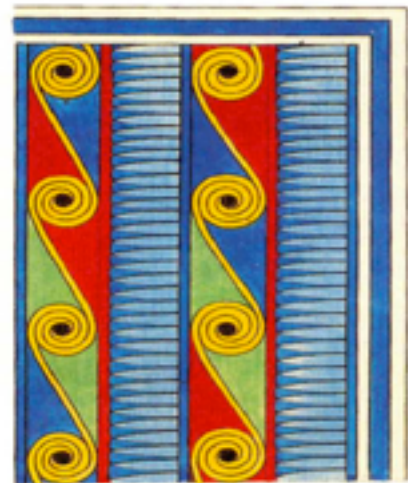
Mais d'abord, voyons rapidement, par l'image, la manifestation persistante, à travers les siècles, de la présence de la trajectoire fondamentale, la spirale, dans les décors conçus par les artistes.

### PÉRIODE HISTORIQUE



Coupes de Coquillages offerts par Nat Friedman

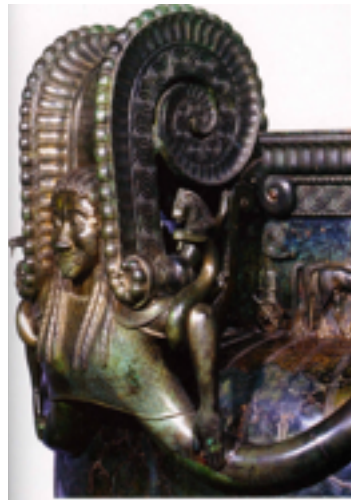




### Motifs égyptiens

Extraits de l'ouvrage d'Ippolito Rosellini «Monuments de l'Égypte et de la Nubie»  
(dessins de l'expédition franco-toscane de 1828)

Bibliothèque des Introuvables, Paris, 2007



Alors que ce type de vase était destiné, dans le monde grec, aux lieux de divination et commémoratifs, le cratère de Vix fut associé à un rite de banquet funéraire d'origine gréco-étrusque. Son riche décor ornemental présente un raffinement d'exécution inédit.



La Gorgone orna le plupart des anses de ces prestigieux cratères en bronze d'art grec archaïque. Le type de visage, de forme hexagonale, avait pu être certains auteurs à situer à Taranto le lieu de création du vase.

Cratère de Vix, - 510 à comparer au vase macédonien qui suit



Epoque d'Alexandre, vers - 320





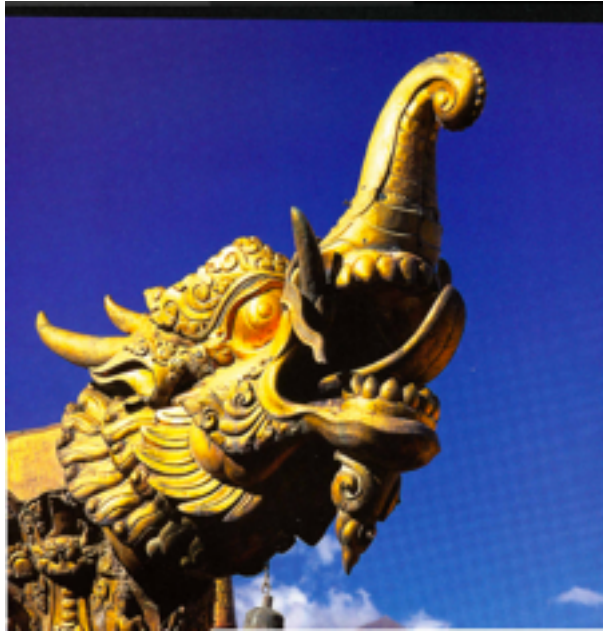
Période grecque (Musée de Tel Aviv)



Historiska Museet, Stockholm



Le Livre de Durrow (Irlande 7<sup>ème</sup> siècle)



Période Ming



Œuvre Arménie



*Athanasius Kircher, 1679*



*Piet Brueghel*



*artiste flamand (XVI<sup>ème</sup>)*



Musée du Louvre

## VINGTIÈME SIÈCLE



La nuit étoilée  
1897



Une bergère de Paul Tibe, exceptionnelle par la finesse de ses spirales sculptées en noyer (1903).

1923



10, Bd de Port-Royal, 6<sup>ème</sup> (G. Jacquet 1937)



3, rue Mouthon, 15<sup>ème</sup>



Dalí  
La Madone de Raphaël à la vitesse maximum, 1954



1957



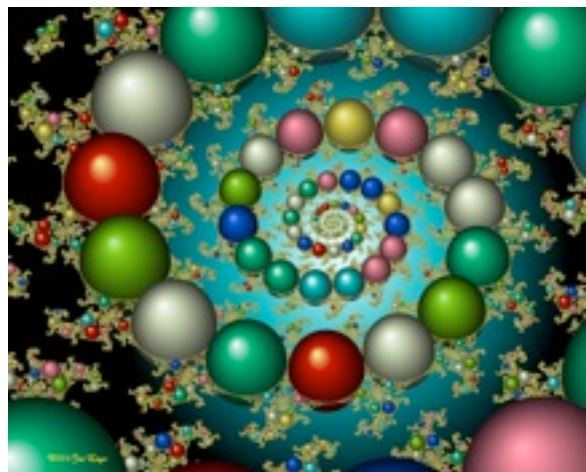
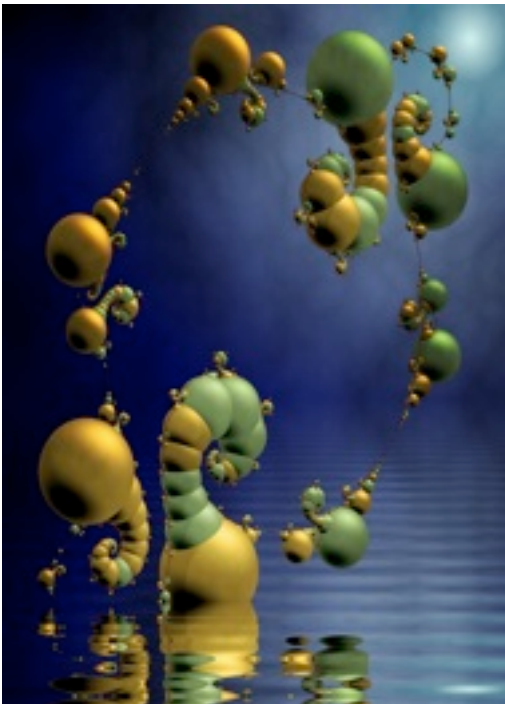
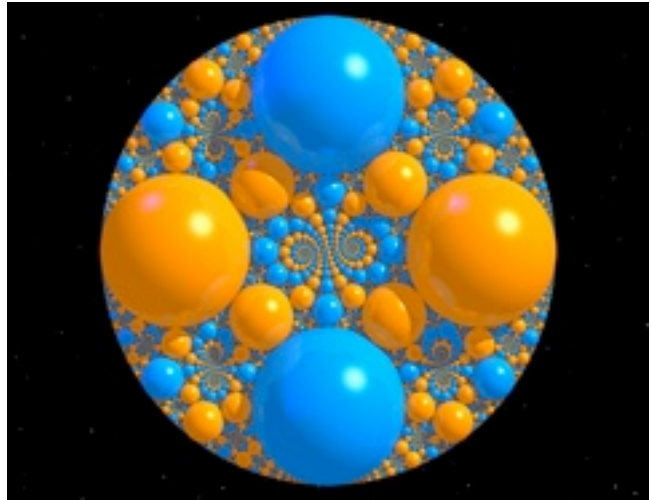
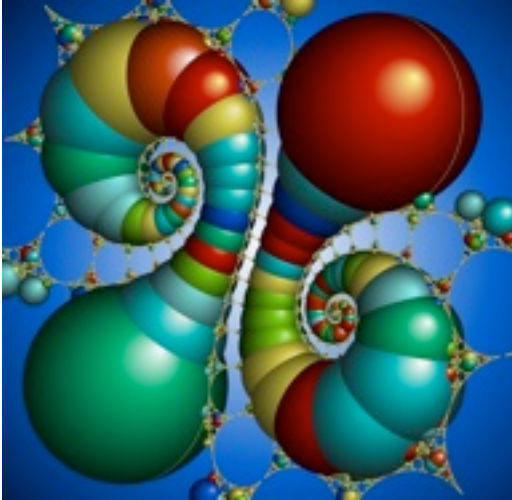
1958



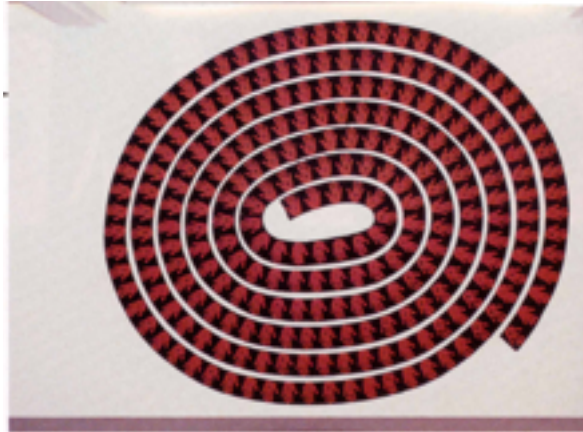
1953

Mauritz Escher

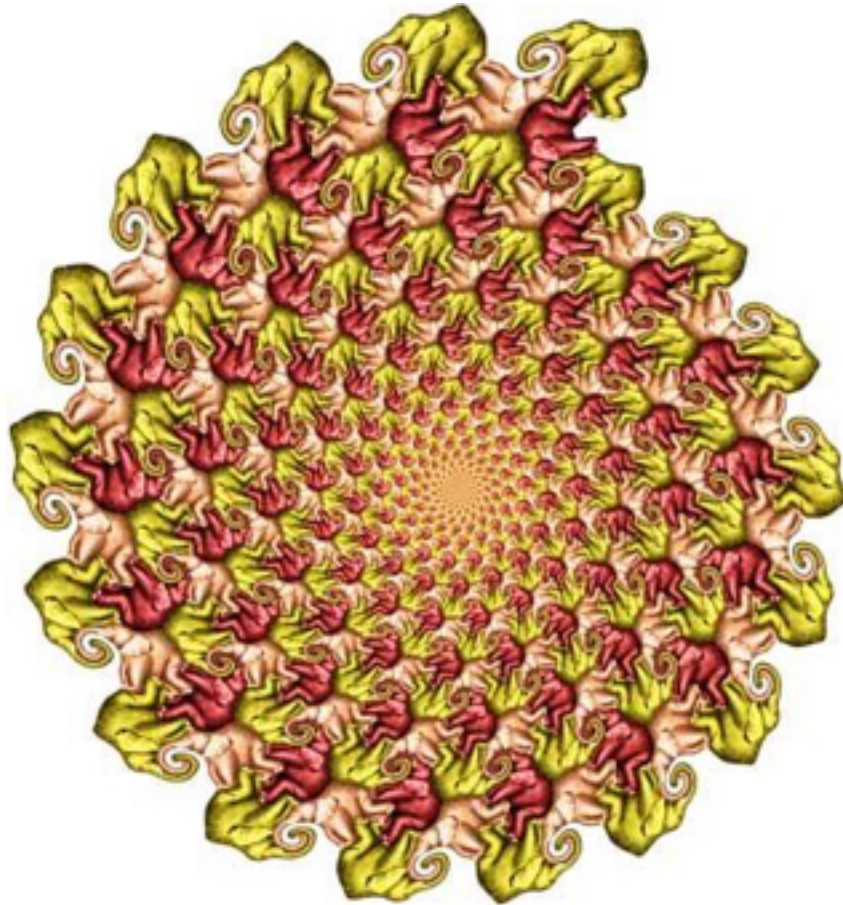
VINGT ET UNIÈME SIÈCLE



Jos Leys 2006-2007



Richard Long, Tiger Hands, 2008, série des Fingerprints, empreintes de boue, argile et kaolin sur un fond peint, H. 350 cm env. (©Richard Long et Saverio Chiappalone).



Dominique Ribault  
<http://www.polytess.info/>



Jean-François Colonna, Coquillage quaternionique (2006)  
<http://www.lactamme.polytechnique.fr/>



Ulrich Eitner, Surface de Bonnet (2006)  
<http://www-sfb288.math.tu-berlin.de/Research/PAINLEVE/bonnet.html>



$$\frac{(z-z_0) \cdot (z-z_1)}{(z-z_2) \cdot (z-z_3)} \cos\left(\arctan\left(\frac{R}{R_1}\right)\right) \cdot e^{i \frac{\log\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right) - \log\left(\frac{z-z_0}{z-z_3}\right)}{2\pi}}$$

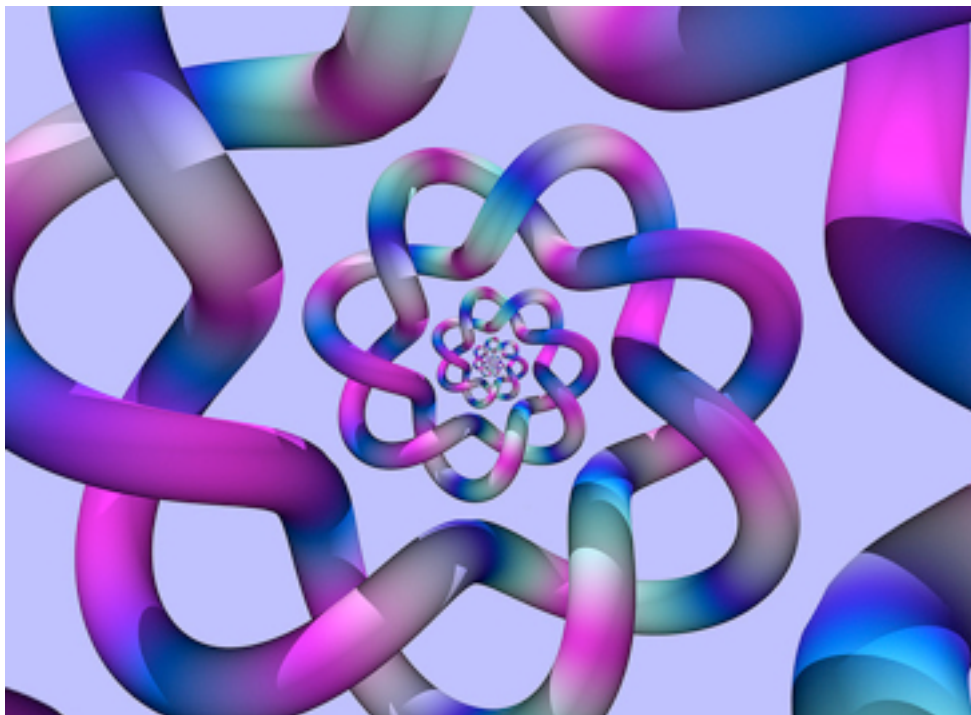
Express It as you feel !



<http://www.hypatiasoft.fr>

[geraud.bousquet@orange.fr](mailto:geraud.bousquet@orange.fr)

Geraud Bousquet (2010)



Francesco De Comite, spirale nouée (2008)

## ARCHITECTURE

Hormis les deux dernières images, celles-ci sont extraites du site :

[http://home.nordnet.fr/~ajuhel/Surfaces/quad\\_archi\\_hel.html](http://home.nordnet.fr/~ajuhel/Surfaces/quad_archi_hel.html)



Aphrodisias (Turquie)



Rome, la colonne Trajane

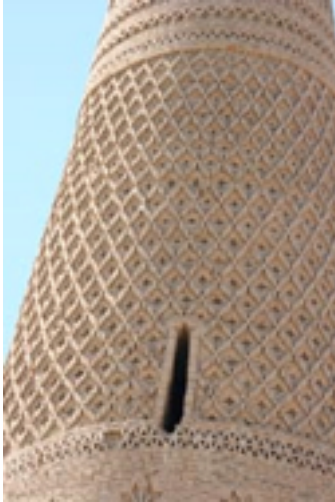


minaret hélicoïdal (52 mètres de haut)



Église Saint-Séverin, Paris (XVème siècle)

de la mosquée d'al-Mutawakkil (848-852)



*Turfan (Chine): mosquée d'Emin Sophie*



*Istanbul (Turquie), Sainte-Sophie*



Colonne Vendôme, Paris



escalier néogothique en pierre bleue, 1870, architecte Henry Beyaert, statues en bronze dessinées par le peintre Xavier Mellery, détail par Raoul Pessemier, MRAH, Bruxelles).

[http://home.nordnet.fr/~ajuhel/Surfaces/quad\\_archi\\_hel.html](http://home.nordnet.fr/~ajuhel/Surfaces/quad_archi_hel.html)

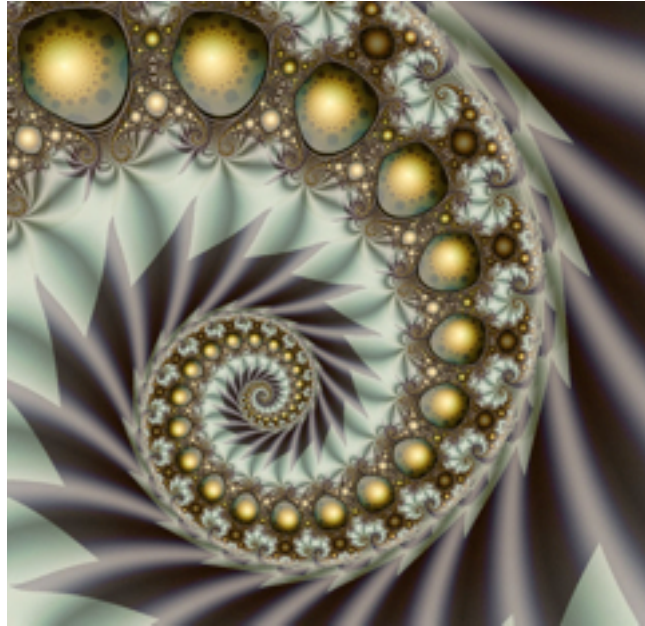


Tour nommée Turning Torso à Malmö (Suède)  
(Calatrava 1999-2004)

### I.3 Deux importantes spirales mathématiques

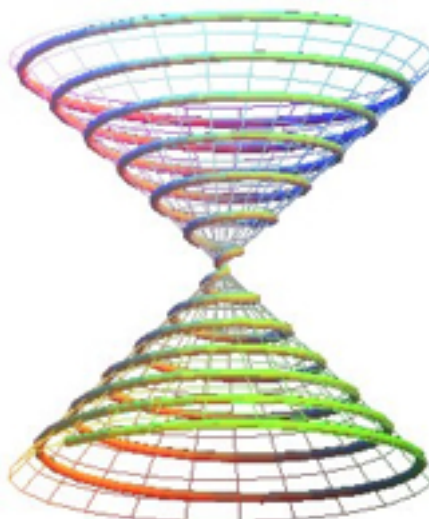
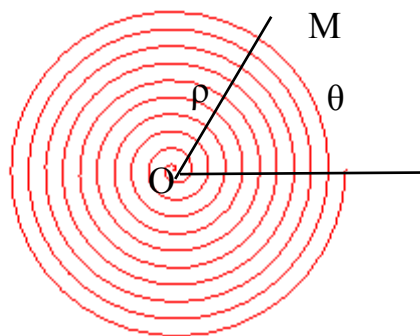
#### I.3.1 *Les Spirales d'Archimède*

Un mot bref sur la représentation mathématique des spirales parmi les plus anciennes et les plus intéressantes, que sont les *spirales archimédiennes* d'une part, les *spirales logarithmiques* d'autre part.



<http://mathematische-basteleien.de/spirale.htm>  
<http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/aspialen/inhalt.html>  
<http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/spiral.html>  
<http://www.mathcurve.com/courbes2d/spirale/spirale.shtml>

On doit à Archimède (-287,-212), ou à son disciple Conon de Samos la première description mathématique d'une spirale plane fort régulière. Si on choisit un point origine  $O$  dans le plan, on note en général par  $\rho$  la distance de  $O$  à un point courant  $M$  de la spirale.  $OM$  fait un angle  $\theta$  avec une droite fixe passant par  $O$ .



Pour la spirale d'Archimède, la distance  $\rho$  est proportionnelle à l'angle :

$$\rho = a \theta$$

Relevée sur un cône droit de base circulaire, elle porte alors le nom de spirale de Pappus (4<sup>ième</sup> siècle).

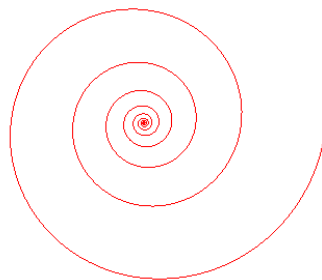
On appelle maintenant spirale archimédienne toute spirale dont l'équation est de la forme

$$\rho^n = a \theta^m + b$$

On ne connaît pas d'étude sur les spirales autre que celle d'Archimède avant le 17<sup>ème</sup> siècle. En ce siècle, se développe pour la première fois l'étude rationnelle et mathématique du mouvement et de la mécanique. Fermat (1601-1665) en 1636 est le premier successeur d'Archimède. Il étudie d'une part le mouvement d'un mobile à l'intérieur de la terre soumis à une accélération constante, et d'autre part celui d'un mobile dont l'aire balayée par le rayon vecteur OM est proportionnelle au carré de l'angle de rotation. Il donne ainsi les équations de deux nouvelles spirales archimédiennes.

### I.3.2 Les Spirales Logarithmiques

En 1638, Descartes introduit la spirale logarithmique : le rayon vecteur OM coupe la trajectoire de M sous un angle  $V$  constant.



Newton (1642-1727) la fait apparaître dans ses Principia (1686) : « en présence d'une résistance de l'air de masse volumique inversement proportionnelle à la distance  $OM = r$ , un mouvement possible dans un champ central en  $1/r^n$ , était une spirale logarithmique (propositions XV, XVI, et XVII) ».

Son équation s'écrit de manière générale :

$$\rho = a e^{\theta/\text{tg}V} \quad \text{ou encore} \quad \text{Log } \rho = b \theta.$$

En donnant à  $a$  la valeur du nombre d'or  $\Phi$ , à  $tgV$  la valeur de  $\pi$ , on rencontre cette spirale quelquefois incarnée approximativement dans la nature :



[Cyclone polaire](#) au large de l'Islande



Whirlpool Galaxy (M51A/B or NGC 5194/5) [NASA/ESA](#)



Détail d'une fleur de [tournesol](#)



Coupe sagittale d'une coquille de [nautilus](#)

[http://fr.wikipedia.org/wiki/Spirale\\_logarithmique](http://fr.wikipedia.org/wiki/Spirale_logarithmique)

Par ailleurs « La spirale logarithmique fut souvent utilisée par l'homme, notamment dans les constructions architecturales, tels certains clochers, jardins, paysages, allées de châteaux ou belvédères, dans lesquels la forme en ouverture confère à l'édifice une dimension d'infini. »

Cette spirale a beaucoup de propriétés inattendues, au point que Jacques Bernoulli (1654-1705), qui l'a beaucoup étudiée, l'a qualifiée de « *spira mirabilis* ». Il a souhaité la faire graver sur sa tombe, de même qu'Archimède avait fait sculpter sur sa tombe un cylindre et une sphère – le graveur a en fait tracé une spirale d'Archimède.



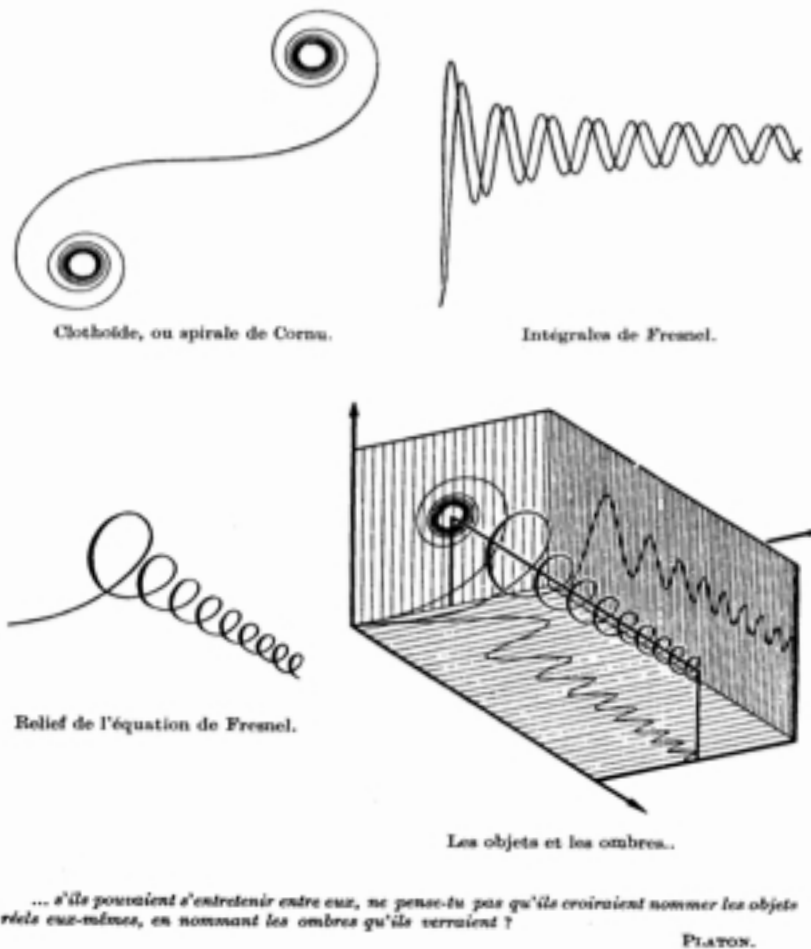
Les spirales considérées jusqu'à présent sont des courbes planes dont nous n'avons pas donné de définition générale. Nous adopterons la suivante : un élément de spirale plane est un élément de courbe d'équation  $\rho = f(\theta)$  définie sur un intervalle  $[\theta_i, \theta_{i-1}]$ , sur lequel  $f$  est non croissante ou non décroissante. Elle peut donc être localement stationnaire. Une spirale plane sera une courbe plane dont tout élément est lui-même spiralé. Avec cette définition, un cercle fait partie de la famille des spirales. Une telle définition s'avère nécessaire, mais non suffisante, pour traiter en toute généralité certaines courbes tracées sur des surfaces qu'on peut également considérer comme des spirales dans un sens plus large que le sens habituel.

Ainsi, sur les surfaces de révolution, les courbes de plus courte distance joignant deux points, ont des formes spiralées.

L'exemple qui suit, d'un intérêt premier en physique, est également riche d'enseignement sur le plan mathématique. Il nous montre la projection, sur les trois plans de référence, d'une spirale dans l'espace usuel.



## POUR ILLUSTRER PLATON



Extrait de l'article de François Le Lionnais « La Beauté en Mathématiques »  
in **Les Grands Courants de la Pensée Mathématique**, Blanchard, Paris 1962

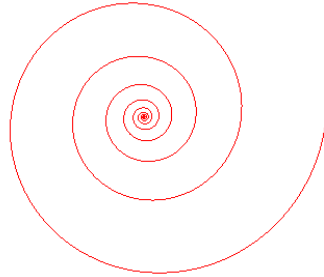
La figure montre également une clothoïde ou spirale de Cornu, étudiée en premier par Jacques Bernoulli. Utilisée en physique de la diffraction par Cornu (1841-1902) pour le calcul d'intégrales de Fresnel, elle sert aujourd'hui pour le dessin des voies ferrées et des autoroutes.

Un moyen simple, on peut le compliquer à souhait, de fabriquer une famille de points  $M_n$  placés sur une spirale plane consiste à fabriquer la suite

$$(\rho, \theta), (\rho^2, 2\theta), (\rho^3, 3\theta), \dots, (\rho^n, n\theta), \dots$$

On reconnaît ici, à travers ces couples de nombres réels, les nombres de Chuquet  $z, z^2, z^3, \dots, z^n, \dots$

Ces spirales jouent enfin un rôle important dans toutes les études de dynamique qualitative comme quantitative. L'équation la plus simple associée à un mouvement, l'équation linéaire  $x'_t = Ax$ , définit la forme des plus illustres des spirales, les trajectoires logarithmiques, dont le point central dans cette figure, selon le mode d'évolution, peut être attractant lorsqu'on se dirige vers lui, ou au contraire répulsant lorsqu'on s'en évade.



### I.3. Conclusion sur les spirales par Salvador Dali

Je ne résiste pas, pour terminer cet aperçu sur la présence des spirales dans les mathématiques et dans les arts, au plaisir de citer à nouveau le fondateur de la méthode paranoïaque-critique, le grand Salvador Dali :

« Mais soudainement je découvris que, dans les entrecroisements des spirales qui forment le tournesol, il ya évidemment le galbe parfait des cornes de rhinocéros.

Maintenant les morphologues ne sont pas du tout sûr que les spirales du tournesol soient de vraies spirales logarithmiques ; ce sont des spirales qui approchent beaucoup, mais il y a des phénomènes de croissance qui font qu'on n'a jamais pu les mesurer avec une exactitude rigoureusement scientifique ; et les morphologues ne sont absolument pas d'accord si ce sont des spirales logarithmiques ou non.

Mais, maintenant, je me suis renseigné à propos de la corne du rhinocéros elle-même : alors là, il n'y a aucun doute, il n'y a jamais eu dans la nature un exemple plus parfait de spirale logarithmique que dans le galbe de corne de rhinocéros. »

Je recommande de poursuivre la lecture du texte de Dali, lorsque, quelques pages plus loin, il analyse avec intérêt une peinture de Raphaël, puis reprend ses considérations farfelues sur son obsession rhinocentrique. En particulier, sa description mathématique d'un rhinocéros vu de dos n'est pas piquée des hannetons.

## **II. Comment la Nature remplit-elle l'Espace ou Le Regard des Artistes et des Mathématiciens sur cette Question**

### II.1 La problématique du pavage

Je reviens maintenant sur cette problématique qui intéresse le physicien, le mathématicien, l'artiste. Soit l'espace usuel, que nous disons de dimension topologique 3, peut-on le remplir sans laisser de vides par des particules identiques, des cristaux, des photons, identique pouvant vouloir dire ayant même type de forme ? Cette question a été abordée par le cristallographe Bravais en 1847. Nous allons examiner ici le cas de la dimension plus petite 2. Un espace de dimension topologique 2 est ce que nous appelons d'ordinaire une surface, dont une réalisation matérielle est par exemple le sol sur le quel nous marchons. Donc un tel sol, un tel plan de travail de cuisine, un mur d'une salle de bains, de telles surfaces peuvent-elles être remplies, sans laisser de vides, sans qu'elles chevauchent, par des courbes identiques, ou bien par des domaines surfaciques identiques, comme par exemple des carrés ?

### II.2 Pavages anciens (égyptiens, arabo-andalous)

Les artistes ne se sont pas intéressés à la question du remplissage d'une surface par des courbes de forme identique. Les mathématiciens, si, leur réponse ici est simple : on peut remplir les surfaces classiques à l'aide de courbes fermées sur elles-mêmes comme le sont les cercles. Dans leur langage codé, ils parlent de feuilletage de ces surfaces par des cercles, ils disent encore que ces surfaces sont fibrées en cercles. Passons.

Par contre, depuis des temps très lointains, les artistes se sont employés à fabriquer des dallages qui couvrent les surfaces, qu'elles soient des sols, des murs, tissus ou tentures. Nous avons déjà rencontré la gravure en ivoire trouvée près du lac Baikal où l'on a vu un motif en forme de spirale recouvrir une portion de domaine plan. Nous avons alors vu aussi, réalisés par des artistes égyptiens, des remplissages de domaine plan par des domaines identiques où figuraient des spirales.

Voici d'autres pavages de cette même origine égyptienne :

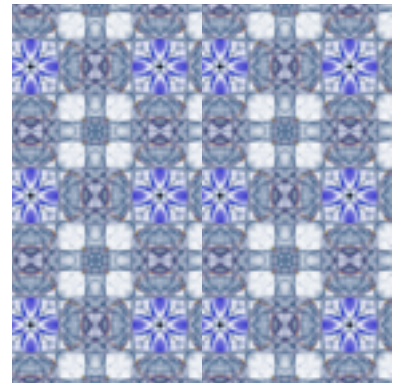
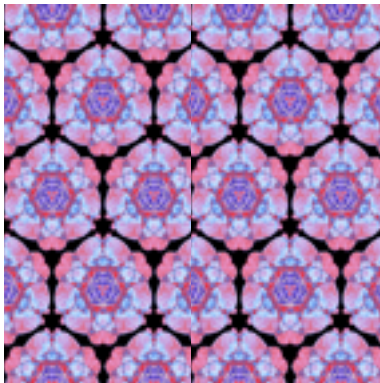


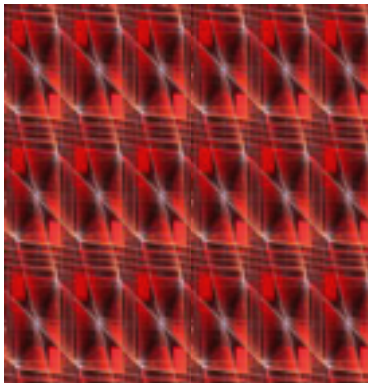
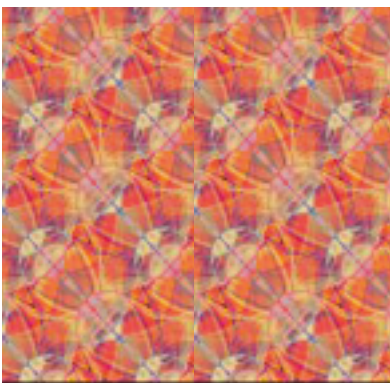
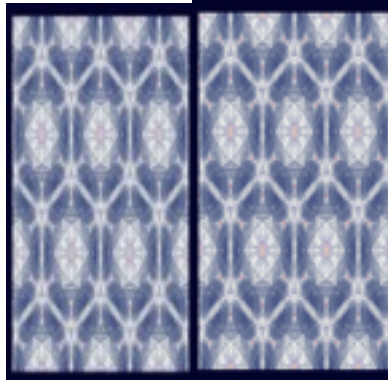
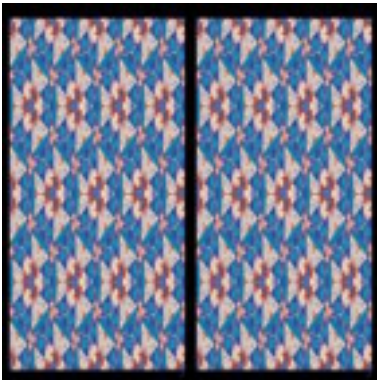
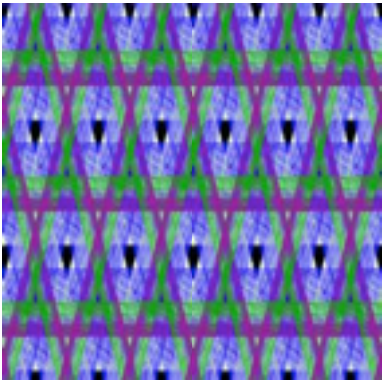
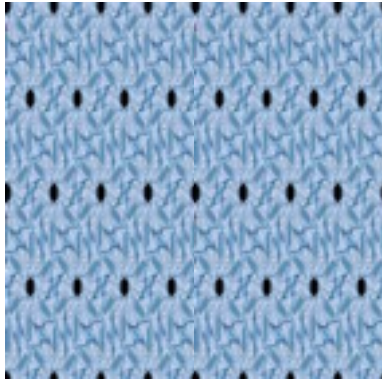
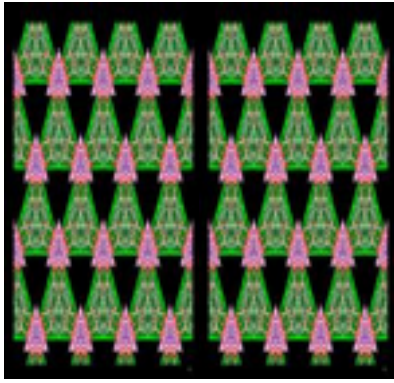
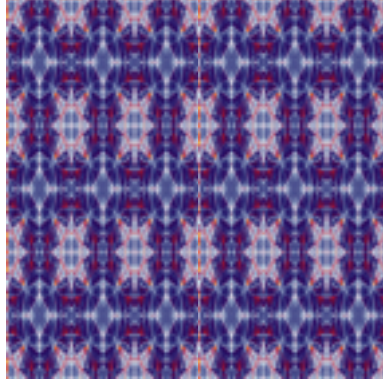
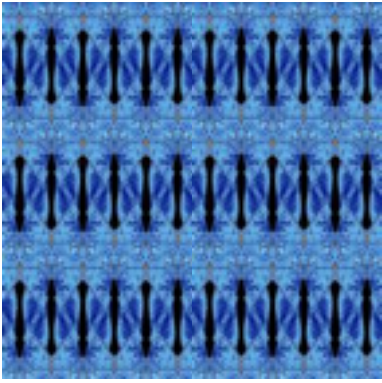
Autres types de pavages fort célèbres, ceux réalisés à l’Alhambra en Espagne, au milieu du 14<sup>ième</sup> siècle, par l’école arabe de Granada. Le minéralogiste russe I.S. Fédorov a montré en 1891 que, d’un point de vue algébrique, il ne peut exister que 17 types de groupes de pavages, ils sont représentés sur les murs de l’Alhambra à Granada.



### II.3 Pavages modernes

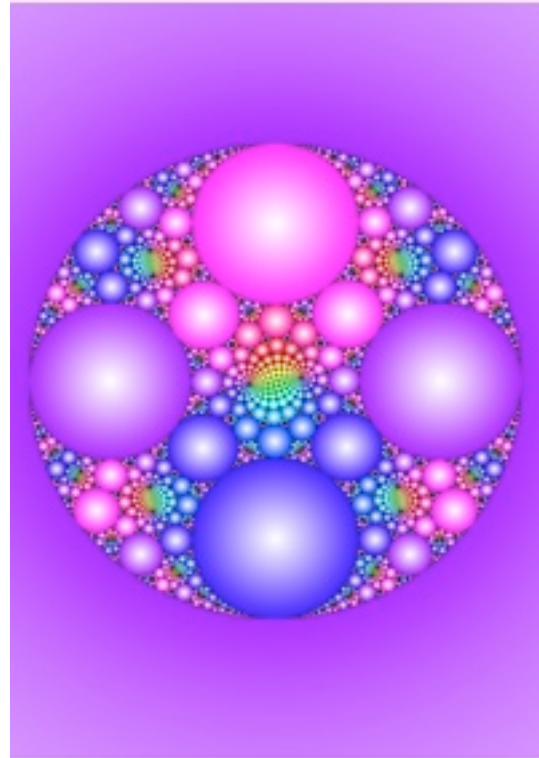
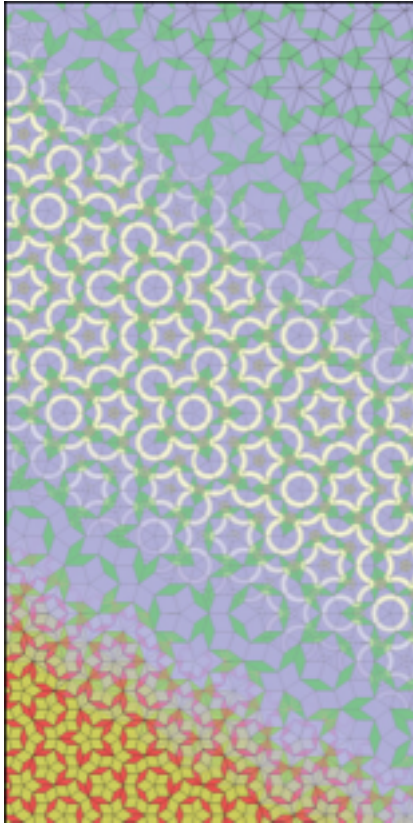
Voici maintenant une collection de pavages du plan réalisés par le mathématicien, Mikael Field :





<http://www.math.uh.edu/~mike/ag/art.html>

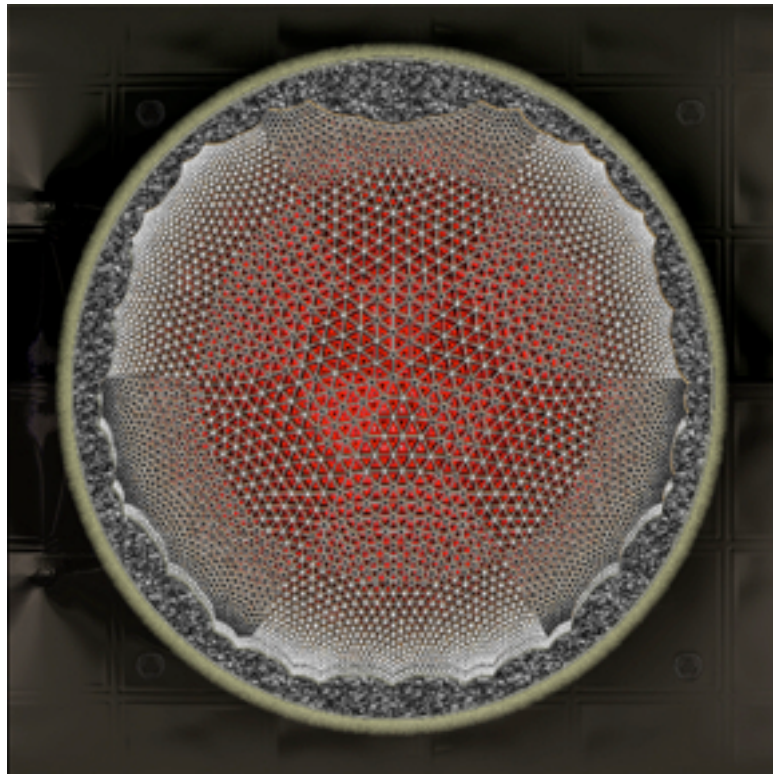
Les deux pavages qui suivent sont dus aux mathématiciens David Austin, Bill Cassselmann et David Wright. Le premier décrit un pavage dit de Penrose (de type 2) présentant de manière périodique une série de motifs pentagonaux. Le second réalise un remplissage d'un domaine circulaire par d'autres domaines circulaires, évidemment de tailles plus petites.



[http://fr.wikipedia.org/wiki/Pavage\\_de\\_Penrose](http://fr.wikipedia.org/wiki/Pavage_de_Penrose)

L'image de Jos Leys que nous avons déjà vue à propos des spirales est un autre pavage de ce domaine circulaire par des domaines du même type.

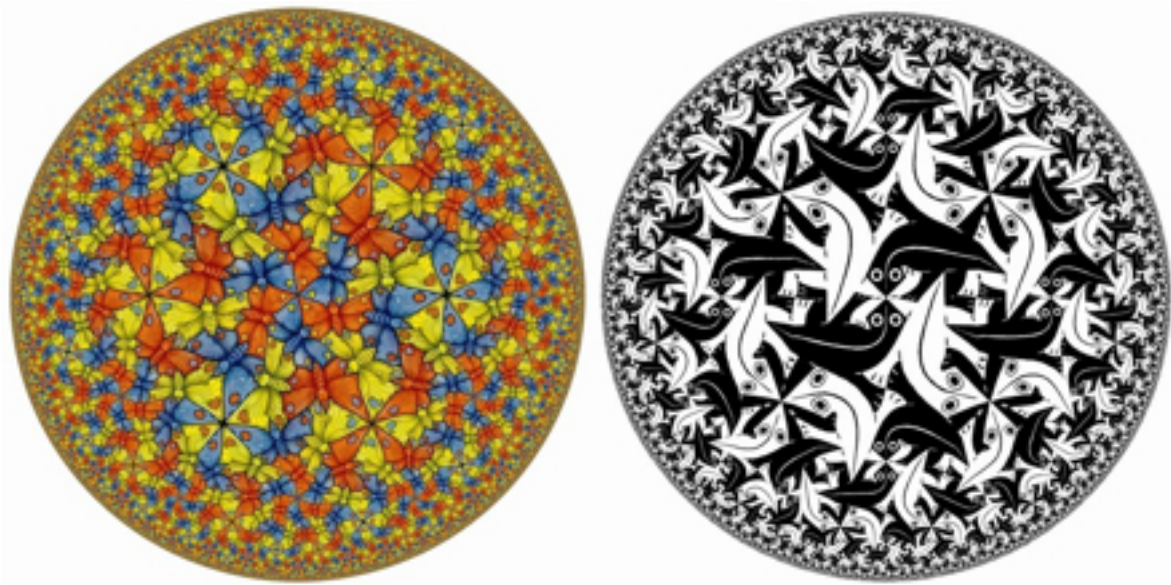
Il existe d'autres pavages de tels domaines circulaires mais provenant de considérations différentes. Au lieu de nous promener dans une plaine, sur une partie de la surface de la terre qui nous paraît localement plate, allons dans les montagnes, où nous franchissons un col. A notre droite et à notre gauche la montagne se relève, elle monte derrière nous vers nous, et redescend devant nous. La forme locale de la montagne est ici celle d'une selle de cheval, que les mathématiciens appellent, par dérision sans doute, une selle de singe. La géométrie de cette partie de la montagne est dite *hyperbolique*. Différentes figures peuvent posséder ce type de géométrie : chacune en est une représentation. L'une d'elle est un domaine circulaire muni de propriétés ad hoc, appelé disque de Poincaré. Il peut être pavé par des polygones dont les côtés sont soit rectilignes soit des portions de cercles.



Voici deux tels pavages exécutés par Escher,

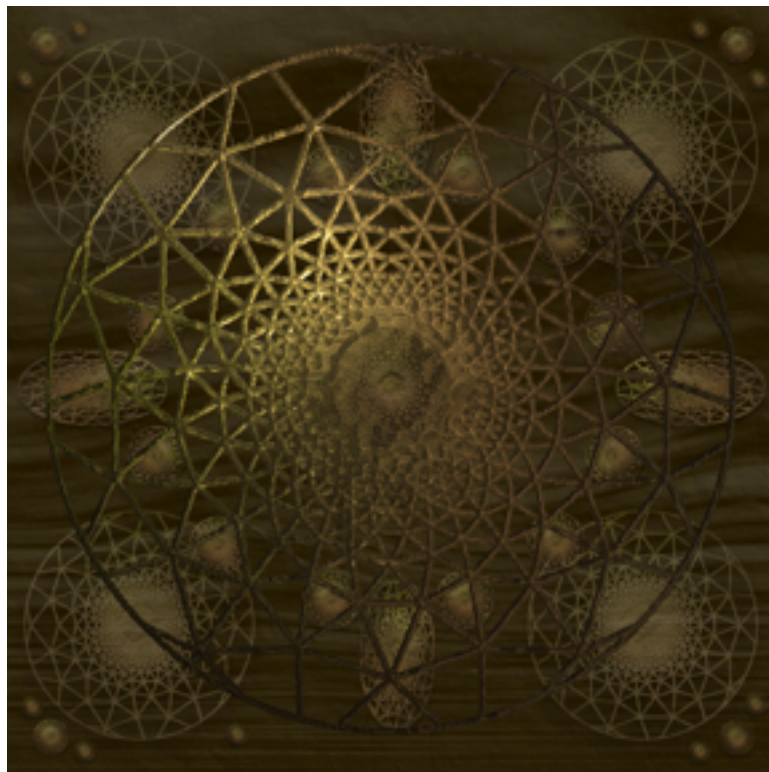






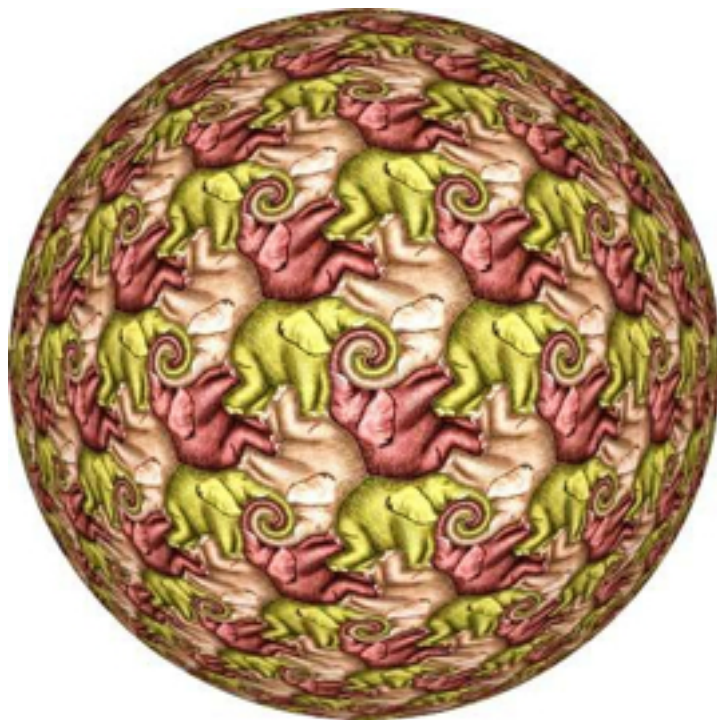
[http://www.josleys.com/show\\_gallery.php?galid=325](http://www.josleys.com/show_gallery.php?galid=325)

et d'autres images artistiques sur fond de pavage hyperbolique réalisées par Jean Constant :



<http://www.hermay.org/jconstant/animation/animhyperboles.html>

Escher a également fabriqué des pavages des polyèdres platoniciens. Voici ici d'autres images fabriquées par ordinateurs faisant apparaître des pavages sur la sphère ou sur un nœud appelé le nœud de trèfle :



<http://www.polytess.info/>

Comment réaliser un dallage sans qu'il y ait de vide entre deux dalles, y aurait-il plusieurs façons de procéder ?

Ces questions sont aujourd'hui classiques, parfaitement résolues, de très nombreux sites leur sont consacrées.

[http://xahlee.org/Wallpaper\\_dir/c5\\_17WallpaperGroups.html](http://xahlee.org/Wallpaper_dir/c5_17WallpaperGroups.html)

[http://pagesperso-orange.fr/therese.eveilleau/pages/truc\\_mat/indexF.htm](http://pagesperso-orange.fr/therese.eveilleau/pages/truc_mat/indexF.htm)



<http://www.math.toronto.edu/~drorbn/Gallery/Symmetry/Tilings/index.html>

#### II.4 Principes de la fabrication des pavages

Voici quelques indications sur le procédé général d'étude employé aujourd'hui.

Pour fabriquer physiquement un dallage, les carreleurs disposent d'un stock de dalles. Une dalle posée, ils prennent une autre dalle de leur stock, la déplacent près de la dalle posée, et par translation ou rotation la font jouxter cette dalle posée.

Ce sont ces mouvements qui ont d'abord été reconnus et étudiés par les mathématiciens. Ils jouent aujourd'hui un rôle essentiel dans la description de l'univers géométrique.

Reconnaissons d'abord dans ces mouvements, les mouvements primordiaux énoncés par Aristote : le mouvement rectiligne de longueur fixée ou translation, le mouvement circulaire d'angle fixé ou rotation.

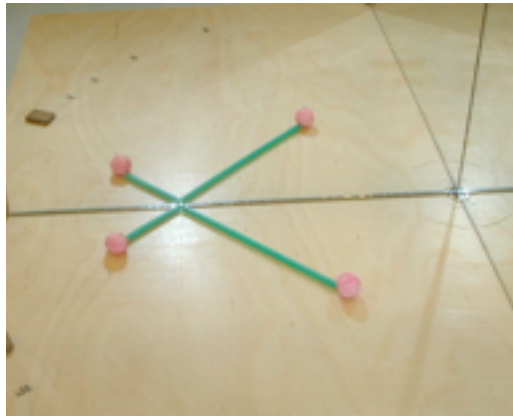
Translations et rotations peuvent se composer entre elles, ce que fait en général le carreleur. La structure de ces ensembles de déplacements soumis à ces compositions internes porte le nom de structure de groupe.

Il est remarquable que ces mouvements, translation et rotation, soient le résultat d'opérations de *réflexions*, c'est-à-dire de symétries par rapport à un miroir.

**Symétrie simple : une réflexion**, la symétrie  $\rho_M$  par rapport au miroir  $M$  :



$$\rho_M(N) = S, \rho_M(S) = N.$$

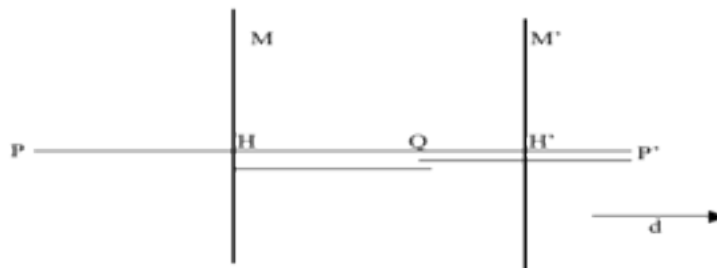


Conception et Réalisation par Maria DEDÓ (Milano)

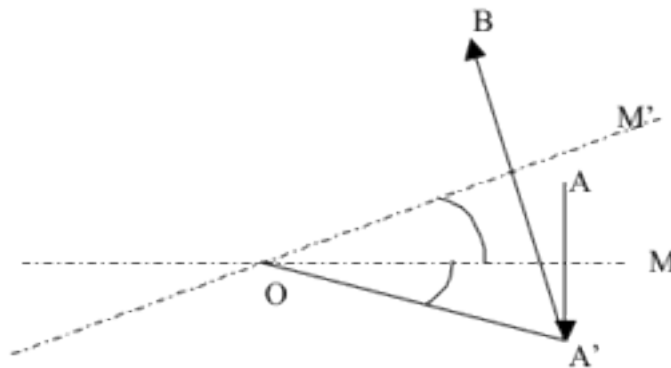
**Translation : deux réflexions**, la translation  $t$  de longueur  $2\theta$  en dimension 2 dans la direction  $\underline{d}$  :

Soient, dans le plan usuel,  $P$  un point,  $M$  et  $M'$  deux miroirs parallèles, perpendiculaires à la direction  $\underline{d}$ , et distants de la longueur  $HH' = \theta$ .

$y$



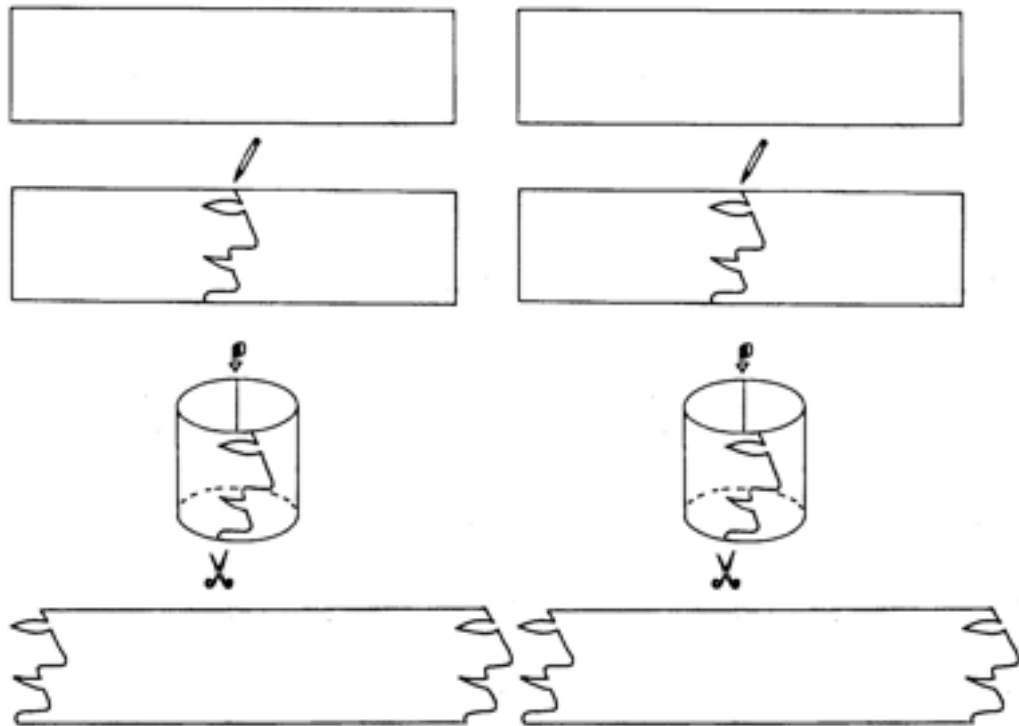
**Rotation : deux réflexions, la rotation  $r$  d'angle  $2\theta$  en dimension 2 de centre  $O$  :**



La symétrie, « *hypnose divine de la géométrie de l'esprit* » disait Dali, est un phénomène optique : l'objet que nous voyons par réflexion dans le miroir est le symétrique de celui que nous tenons à la main. Un symétrique se construit par réflexion. Il est remarquable qu'on puisse également décomposer et recomposer toute translation et toute rotation à l'aide de réflexions sur des miroirs convenablement placés. On retrouve ici le rôle fondamental et sous-jacent de la physique de la lumière dans la compréhension et dans la description de l'univers mathématique.

Pour fabriquer un pavage, on utilise de manière convenable toutes ces symétries, ou toutes ces jeux de réflexion comme vous voudrez les appeler. Je ne vais pas détailler les 17 façons distinctes de les employer, simplement présenter une des plus simples d'entre elles, celle associée à la translation.

Le dessin suivant, que j'emprunte sans sa permission à un prix de Rome, passionné de pavages, Raoul Raba, nous montre comment on fabrique en pratique un pavage par translation. On utilise le procédé antique du cylindre qu'on fait rouler sur un support adapté, de l'argile molle par exemple, aujourd'hui sur une feuille de papier :



Le procédé du cylindre permet de réaliser un pavage dans la direction du roulement de ce cylindre dont le cercle de base a pour périmètre  $l$ . Le motif, de longueur  $l$ , est collé sur le cylindre. Le roulement du cylindre imprime le motif de manière périodique. Les mathématiciens appellent alors ce cylindre une «orbifold».

Voici une autre orbifold, plus savante, matérialisée par la sculpture suivante :



An **orbifold** is the [orbit space](#) of a manifold with a [group action](#). Mathematically, the sculpture (as a solid, i.e., with the interior filled in) is the [orbifold](#)  $T^3 / S_3$  – the quotient of the 3-[torus](#) by the [symmetric group](#) on 3 letters; equivalently, 3 unordered points on the circle (3

ordered points on the circle corresponding to the 3-torus, and ignoring the order corresponding to the quotient map). The 3-dimensional interior corresponds to the points on the torus where all 3 coordinates are different, the 2-dimensional face correspond to the points on the torus where 2 coordinates coincide but the third is different, and the 1-dimensional edge corresponds to points on the torus where all three coordinates are equal.

The sculpture *Topological III*, by American artist and physicist [Robert R. Wilson](#), is at the entrance to the [Harvard Science Center](#) building, [Harvard University](#), [Cambridge, Massachusetts](#).

Musical triads can be modeled as points in a certain 3-dimensional orbifold, which may be realized as a solid torus with triangular cross-section and a twist.

<http://en.wikipedia.org/wiki/Orbifold>

## II.4 Surfaces anciennes et modernes : quelques incarnation artistiques

Supposant que nous avons une connaissance suffisante des techniques théoriques et pratiques de pavage sur sol, la question se pose néanmoins de savoir ce qu'on entend par ce terme, de pouvoir en reconnaître les propriétés ; de parvenir à les classer.

Qu'entend donc le mathématicien en particulier par sol ? Il entend par là une surface, c'est-à-dire un domaine, souvent immense, mais qu'on peut diviser en petites cartes locales de sorte que, presque partout, on peut rapporter la position d'un point à deux coordonnées locales, appelons-les la longitude locale  $x$  et la latitude locale  $y$ . Les surfaces sont ainsi des objets dont on dit que la dimension topologique est 2.



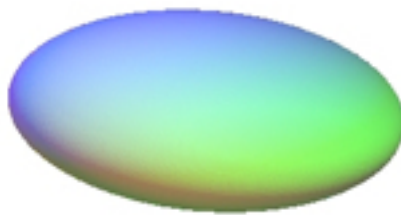
Le recollement des cartes locales permet d'obtenir la surface dans sa globalité.

Le nombre des surfaces est infini. Jetons un coup d'œil rapide sur quelques exemples de sols, de surfaces, enveloppes de mondes habités, sur lesquels peuvent se déplacer, marcher des êtres qui peut-être nous ressemblent.

Voici d'abord les surfaces classiques (celle du plan n'est pas représentée) qui n'ont pas de singularité pointue. Une parmi d'autres de leur caractérisation principale est leur courbure locale dite totale. Les trois principales surfaces sont le plan de courbure nulle, la sphère unité de courbure 1, l'hyperboloïde « unité » de courbure -1. Un théorème dit d'uniformisation dit qu'en dehors de singularités, la forme locale de toute surface est soit celle du plan, soit celle locale de la sphère, soit celle locale de l'hyperboloïde. Il n'y a donc que ces trois géométries fondamentales possibles sur une surface quelconque.



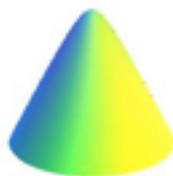
Sphère



ellipsoïde



hyperboloïde à une nappe



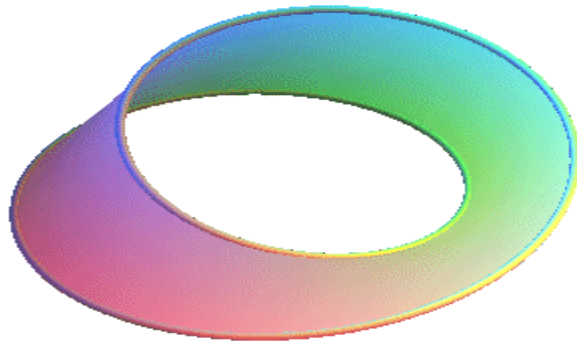
Hyperboloïde à deux nappes

Une autre caractérisation des surfaces est leur indice dit d'Euler-Poincaré, qui détermine de leur genre (leur nombre de trous intrinsèques). Une troisième de leurs caractéristiques est leur orientabilité.





Tore  
(orientable, genre 1)



Ruban de Moëbius  
(non orientable, genre 1)

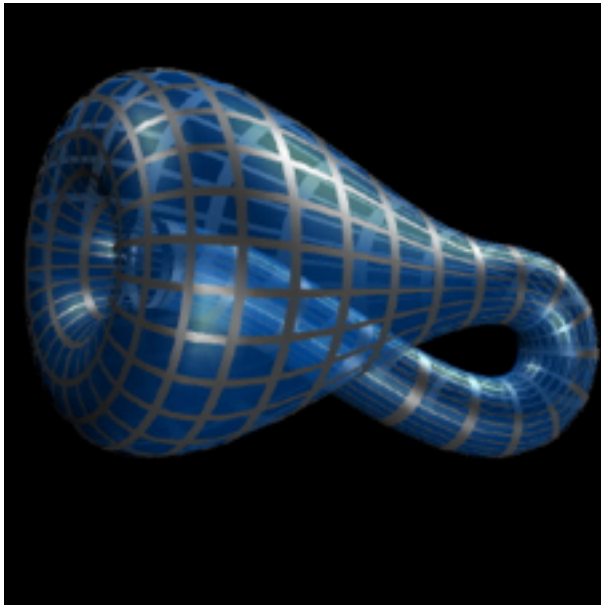
(<http://www.mathcurve.com/surfaces/> )

Des représentations déformables de ces surfaces types ont été conçues par Dmitri Kozlov de l'Académie d'architecture de Moscou, à partir de noeuds très particuliers qu'il dénomme Nodus - un *noeud* est une courbe (dans un espace queclonque) qui se referme sur elle-même. C'est ainsi qu'on déformer le Nodus *b.*, qui symbolise ici l'hyperboloïde à une nappe, pour lui donner l'apparence d'un tore *c.* ou d'une sphère *a.*

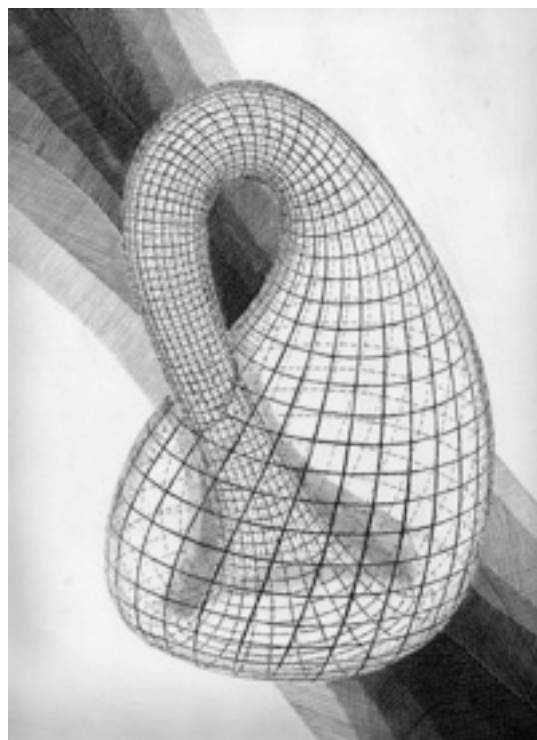


**Dmitri Kozlov** : Trois Nodi

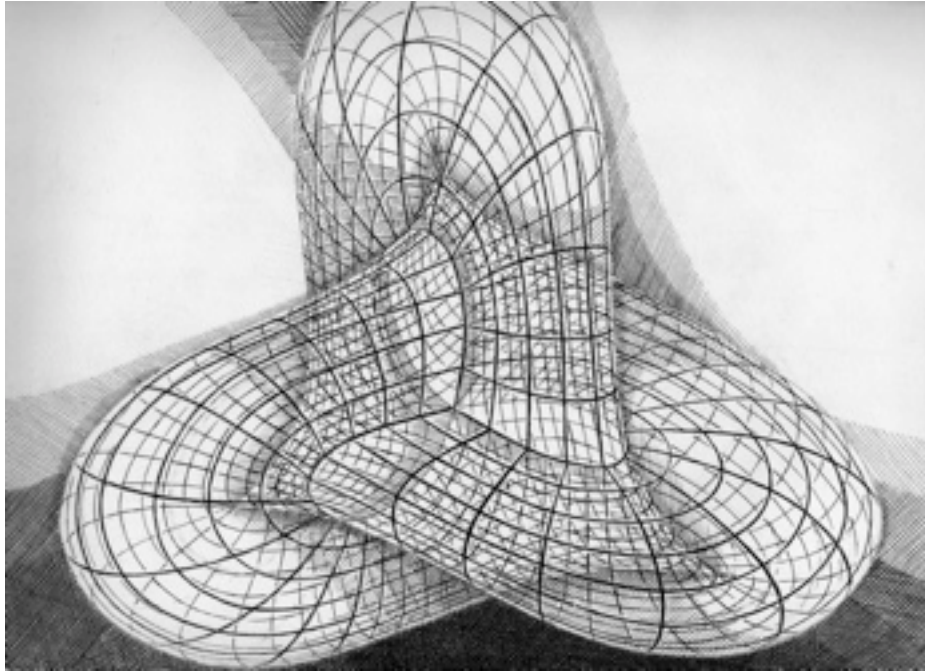
Voici d'autres surfaces non orientables dont les noms sont bien connus. On ne peut les représenter dans l'espace usuel qu'à la condition de faire en sorte qu'elles se croisent elles-mêmes en des lignes particulières :



La fameuse bouteille de Klein (1882) (Banchoff & alii)  
(<http://www.mathcurve.com/surfaces/klein/klein.shtml> )



gravée par Jeener

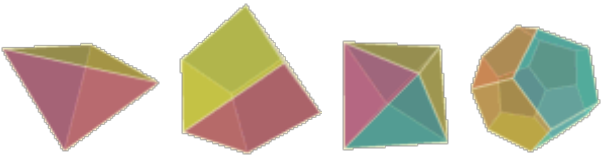


Surface de Boy (Jeener)


Voici maintenant les premiers éléments de la famille des polyèdres, les cinq solides platoniciens, dont les bords sont des surfaces présentant des singularités pointues. L'indice  $\chi(P)$  d'Euler-Poincaré d'un polyèdre quelconque P se calcule par la relation :

$$\chi(P) = \text{Nombre de faces} - \text{nombre d'arêtes} + \text{nombre de sommets}$$

**Surfaces transparentes**



**Solides pleins**



[L'icosaèdre](#)  
[Le dodécaèdre](#)  
[L'octaèdre](#)  
[Le cube](#)  
[Le tétraèdre](#)  
[Pourquoi cinq seulement ?](#)

Cliquer chaque solide pour l'animer dans une nouvelle fenêtre :  
les premiers sont transparents, les suivants sont opaques.

[http://pagesperso-orange.fr/therese.eveilleau/pages/truc\\_mat/textes/platon.htm](http://pagesperso-orange.fr/therese.eveilleau/pages/truc_mat/textes/platon.htm)

Il est arrivé dans l'antiquité que l'un de ces polyèdres, le dodécaèdre en particulier, ait donné sa forme à des dès à jouer, notamment chez les Etrusques et chez les Romains. Mais c'est dans les œuvres de la Renaissance qu'ils furent surtout représentés. Quatre d'entre elles sont célèbres : les dessins faits par Léonard de Vinci pour illustrer l'ouvrage de son collègue Fra Luca Pacioli, mathématicien auteur d'un ouvrage renommé, *Divina Proportione* (1509), le tableau de Jacopo de Barbari le représentant, la gravure de Dürer intitulée *Melancholia* (1514) (cf l'Anti-Dürer de Fomenko), et la sculpture sur bois dans l'église Santa Maria di Organo à Veronne.



Dürer :Melancholia (1514)



Fra Luca Pacioli par Jacopo de Barbari



Eglise Santa Maria in Organo, Véronne

De nos jours, en dehors de Escher, l'artiste contemporaine Sylvie Donmoyer a repris dans quelques oeuvres le thème des polyèdres à l'ancienne.



« Still Life with Platonic Solids »  
Private collection - U.S.A.

Mais également le peintre Salvatore Dali a repris le flambeau d'inscrire les polyèdres dans ses toiles, par exemple un icosaèdre dans son tableau de 1955 « Le dernier Repas » :



Mais sa toile la plus célèbre est celle de la Crucifixion, sous-titrée *Corpus hypercubicus*, où sert de croix le développement dans l'espace tridimensionnel du cube de l'espace quadridimensionnel.

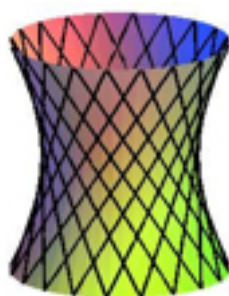


Une des classes de surfaces parmi les plus anciennes est celle des surfaces réglées, comme le cylindre et le cône, engendrées par des droites s'appuyant sur une courbe. Faciles à réaliser, elles sont abondamment utilisées en architecture.

Parmi les plus célèbres sont l'hélicoïde, engendrée par les droites s'appuyant sur une hélice, l'hyperboloïde à une nappe et le paraboloid.



Un château d'eau de forme [hyperboloïde](#), hyperboloïde par [Les Essarts-le-Roi](#)



La première structure [Vladimir Choukhov](#), [Nijni Novgorod](#), 1896

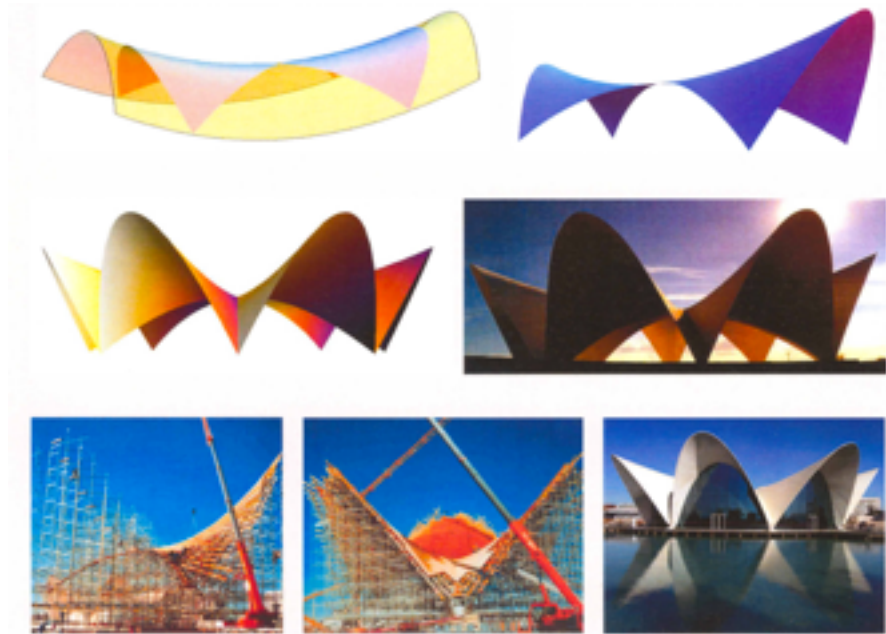
<http://www.mathcurve.com/surfaces/hyperboloid/hyperboloid1.shtml>

[http://fr.wikipedia.org/wiki/Structure\\_hyperbolo%C3%AFde](http://fr.wikipedia.org/wiki/Structure_hyperbolo%C3%AFde)

<http://www.mathcurve.com/surfaces/paraboloidhyperbolic/paraboloidhyperbolic.shtml>

Ces deux objets mathématiques ont fait les délices de la brillante école architecturale espagnole. L'architecture de la fameuse église de Barcelone

construite par Gaudi (1852-1926), *La Sagrada Família*, repose sur l'emploi d'une multitude d'hyperboloïdes à une nappe. Quant au tandem Candela et surtout Calatrava, ils se sont fait une spécialité dans l'emploi du parabololoïde hyperbolique.



**Figure 9:** *L'Oceanografic in Valencia under construction, (Santiago Calatrava - Felix Candela, 2002). The vaults are formed by rotated hyperbolic paraboloids of equation  $y^2/100 - x^2/4,6792 = z-6$ . Each hyperbolic paraboloid is cut by four planes. The buildings are inspired on Restaurant Los Manantiales (Xochimilco, 1953); a former project of Felix Candela developed during his Mexican period.*



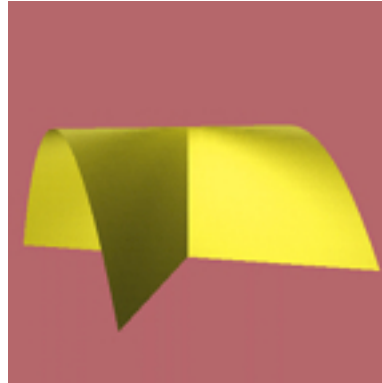
Pont sur le canal Hoofdvaart, Hollande  
(Calatrava : 2004)



Milwaukee Art Museum  
1994-2001)

D'autres surfaces réglées, comme par exemple les cubiques de Cayley, ont inspiré les œuvres des sculpteurs Antoine Pevsner (1886-1962) et Naoum Gabo, frère du précédent.

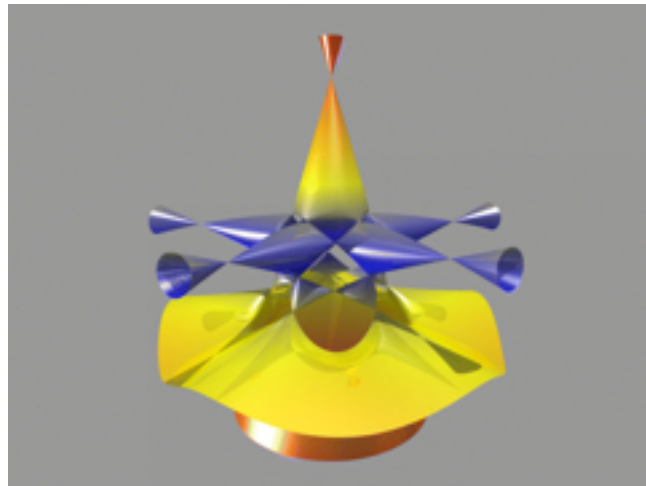
La théorie des singularités différentiables du 20<sup>ème</sup> siècle a conduit sur la découverte de nombreuses autres surfaces réglées, comme le parapluie de Whitney et certains ensembles de catastrophe de Thom. Ces nouvelles surfaces peuvent être incarnées dans des architectures nouvelles.



$$x^2z = y^2$$

<http://www.geom.uiuc.edu/zoo/features/whitney/>

Voici maintenant des surfaces non polyédriques présentant à nouveau des singularités (le nombre et le type de singularité font partie des caractérisations de ces surfaces) :



Derviche

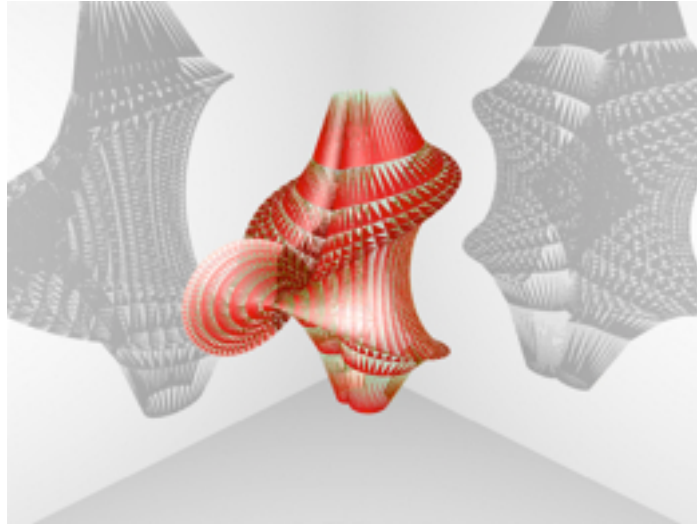
$$aF+q=0 \text{ où: } F = h_1h_2h_3h_4h_5, \quad h_i = \cos(2\pi(i-1)/5)x - \sin(2\pi(i-1)/5)y - z$$

$$q = (1-cz)(x^2+y^2-1+rz^2)^2 \quad a, c, r \text{ sont des constantes adaptées}$$

$$64(x-1)(x^4-4x^3-10x^2y^2-4x^2+16x-20xy^2+5y^4+16-20y^2)-5a(2z-a)[4(x^2+y^2+z^2)+(1+3\sqrt{5})]^2 = 0$$

$$a = \sqrt{(5 - \sqrt{5})}$$



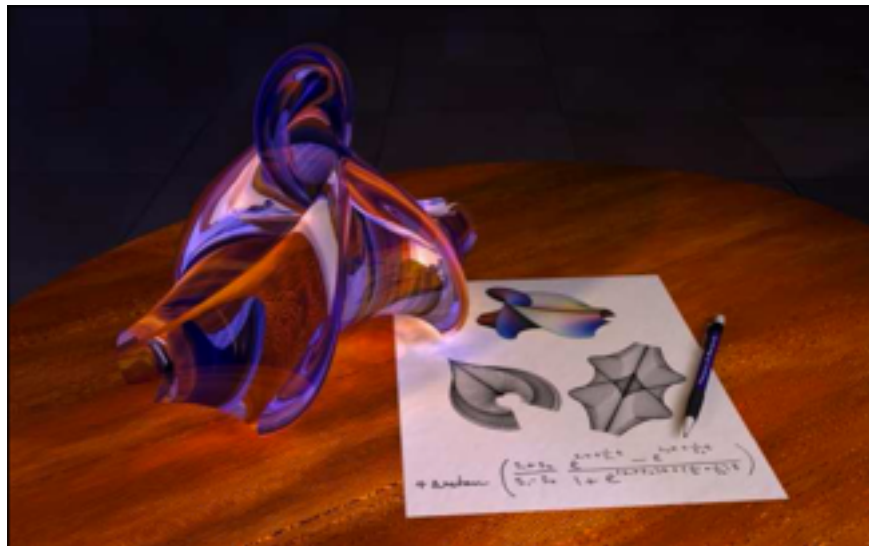


Surface de Kuen de courbure -1  
On y voit des courbes singulières

$$\begin{aligned}x &= 2[\cos u + u \sin u] \sin v / [1 + u^2 \sin^2 v] \\y &= 2[\sin u - u \cos u] \sin v / [1 + u^2 \sin^2 v] \\z &= \log[\tan(v/2)] + 2 \cos v / [1 + u^2 \sin^2 v]\end{aligned}$$

<http://jalape.no/math/kuengif.htm>

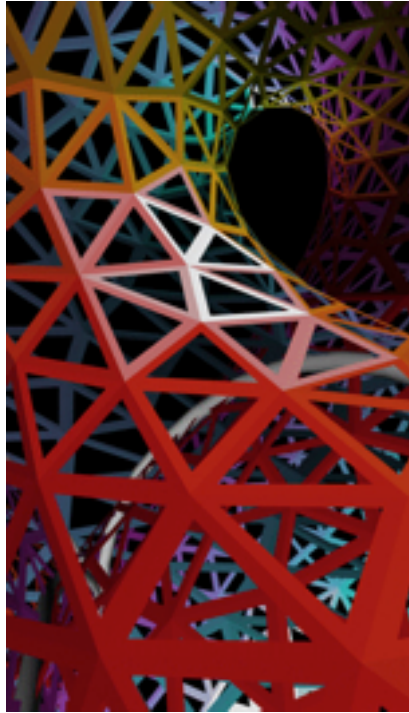
Voici la partie centrale de la même surface de Kuen, œuvre primée en 2009 par la National Science Foundation :



Songe d'un étudiant

(Luc Bénard-Richard Palais)

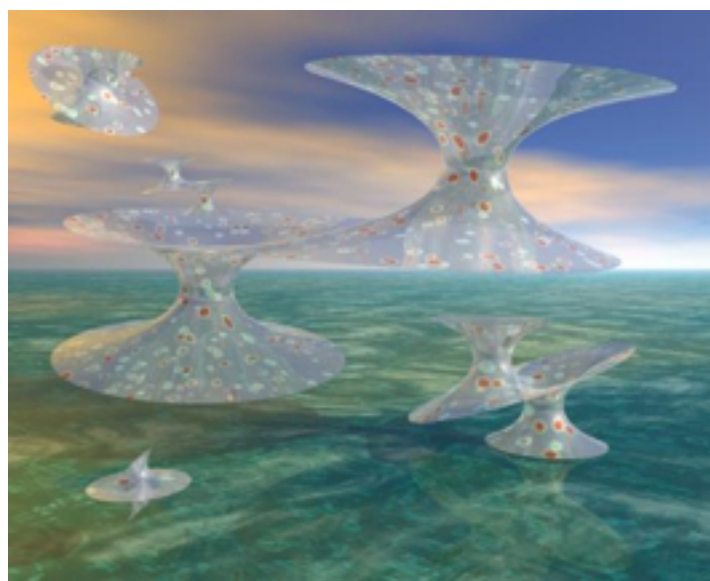
Toutes les surfaces que nous avons rencontrées jusqu'à présent, sauf la dernière, celle de Kuen, sont dites algébriques, car on peut donner leur équation sous une forme polynômiale.



Retournement de la sphère à énergie minimale

<http://torus.math.uiuc.edu/jms/Images/>

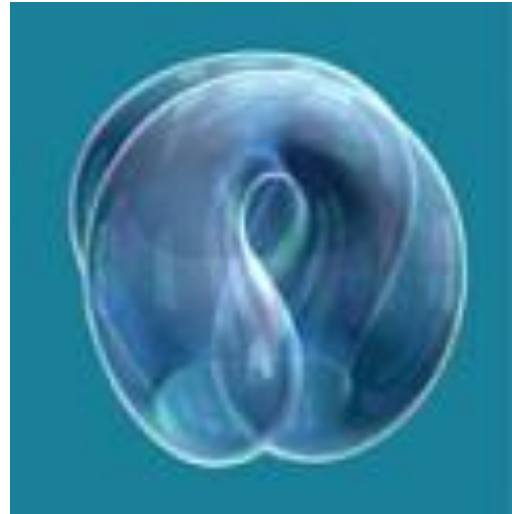
Une dernière classe importante de surfaces est celle des surfaces optimales, parmi lesquelles les surfaces dites minimales, comme l'est la sphère ou celles des bulles de savon. Leur forme est celle qui assure une dépense minimale d'énergie pour les constituer. Reconnues depuis la fin du 18<sup>ème</sup> siècle, elles présentent bien sûr un fort intérêt pour la description et la compréhension des formes des objets du monde physique.



<http://www.indiana.edu/~minimal/gallery/index/>



Polytope régulier en Bulles de savon



Surface de Willmore

John Sullivan

La dernière image que voici est en quelque sorte une petite synthèse des surfaces révélées par les mathématiciens.



Luc Bénard-Richard Palais

(œuvre primée par la National Science Foundation)

On « reconnaît » ici, de droite à gauche : en haut, une surface minimale 4-noïde, un breather, une surface de Boy, en bas, une bouteille de Klein, la surface de Seivert-Enneper

[http://virtualmathmuseum.org/Surface/gallery\\_o.html#PseudosphericalSurfaces](http://virtualmathmuseum.org/Surface/gallery_o.html#PseudosphericalSurfaces)

## CONCLUSION

Si les surfaces classiques, sphères, cônes, hyperboloïdes ont trouvé depuis longtemps leur incarnation dans l'architecture, ce n'est pas encore le cas de surfaces découvertes plus récemment.

Dans le projet de musée des mathématiques éclaté que j'ai conçu (projet ARPAM), certaines de ces surfaces sont présentes. Ce projet, tout comme les expositions mathématiques et arts, ou la conférence de ce soir, a d'abord pour but de contribuer à affaiblir les barrières psychologiques qui séparent les publics des mathématiques. Dans ce projet, un grand parc verdoyant de promenade est égayé par des petits bâtiments, des folies en terme architectural, entièrement définies et décorées par les mathématiques. Elles illustrent chacune un chapitre des mathématiques, des concepts, des faits. On se promène dans ce parc d'abord pour le plaisir des yeux, et pour la détente de l'esprit, surpris par les décors.

J'ai pensé à 10 folies, en hommage aux Pythagoriciens, qui attribuaient une valeur sacrée à la suite des quatre premiers nombres, 1, 2, 3, 4 et à leur somme le nombre 10.

Ce projet n'est pas encore venu à réalisation. Les espoirs du côté des communautés française et grecque sont aujourd'hui évaporés, et les espérances du côté russe ont tendance à fortement diminuer. Le projet donc encore reste à l'état d'esquisses.

Je présenterai pour conclure celles de quatre folies. La première a pour vocation d'illustrer la théorie des groupes, la seconde la théorie des quadriques, la troisième et la quatrième, la topologie.

L'illustration de la première a été réalisée par deux étudiants de l'Institut de l'Internet et du Multimédia du Pôle Universitaire Léonard de Vinci, l'illustration de la seconde et de la troisième est due à Dmitri Kozlov de l'Académie d'Architecture de Moscou. L'illustration de la dernière, une surface de Boy d'après l'équation d'Apéry, fait l'objet d'une animation créée par Christophe Delsart et Yvan Ngnodjom.



**Le Septième Temple**

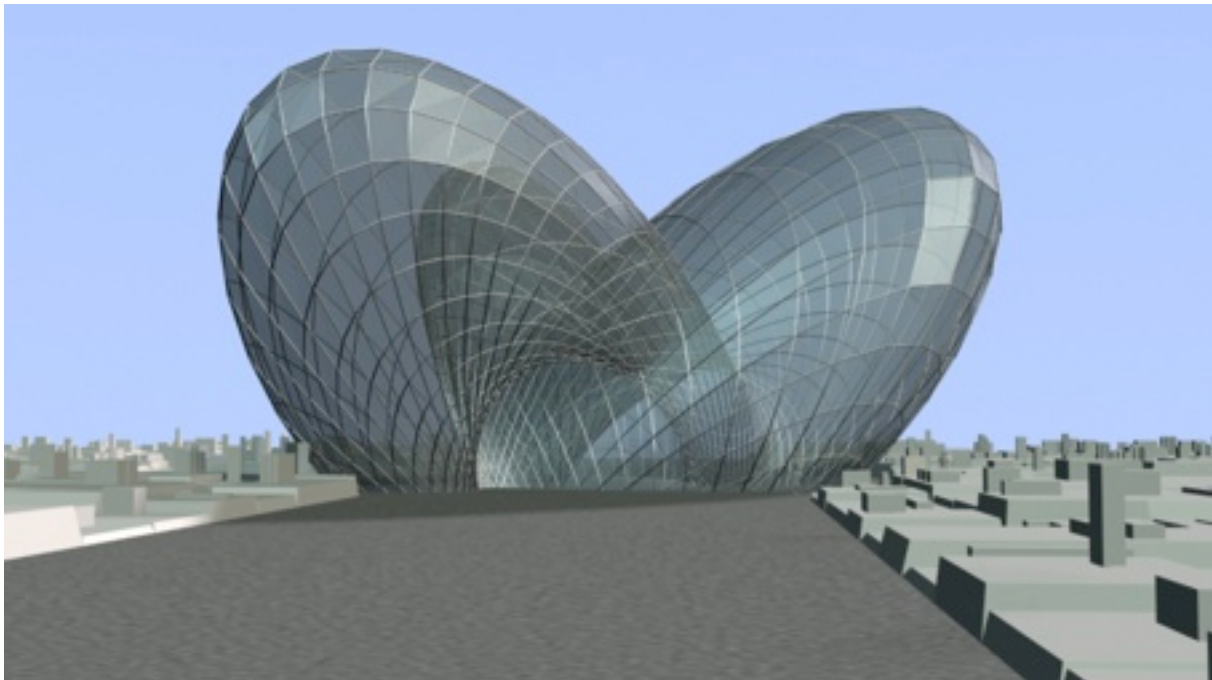
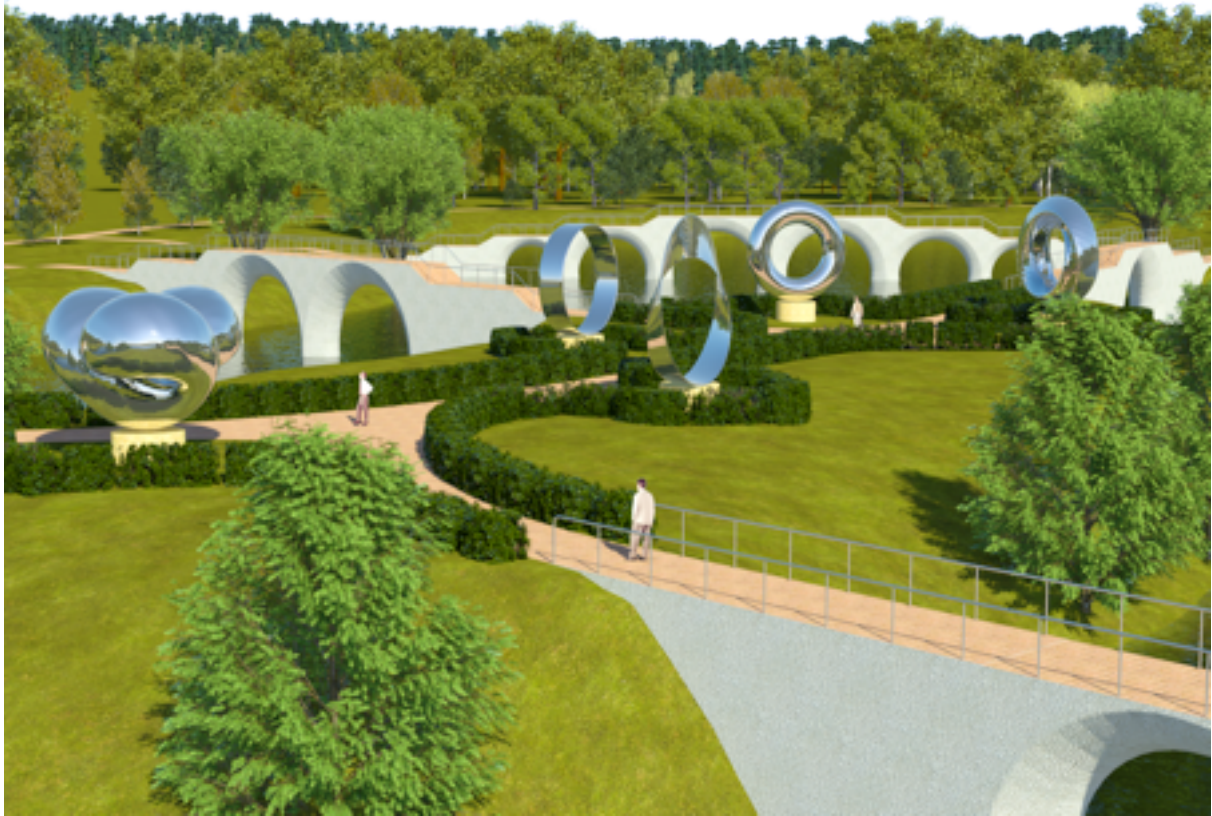




**La Coiffe D'Apollonius**

**Les Ponts d'Euler**





**La Brioche de Boy**

## NOTES

### 1. Sur Dali

Les citations sont extraites de son ouvrage :

Salavador DALI : **Oui, Méthode paranoïaque-critique et autres textes**, Denoël/Gonthier, Paris, 1971

Les images sont extraites de l'ouvrage :

DALÍ : (Robert Deschames-Gilles Néret Ed.) Taschen GmbH, Köln, 2010

Deux mathématiciens ont déjà quelque peu commenté Dali :

Slavik JABLAN : *Geometry in Dali's work : a play with ambiguity*

Marc CHAPERON : *Une hirondelle en hiver*, Pour La Science n° 338, Décembre 2005.

où est présentée cette œuvre, la dernière du peintre :

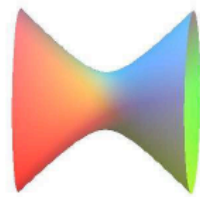


Les connaisseurs de la théorie mathématique des catastrophes y reconnaîtront une figure familière et emblématique. On y voit la pureté de la ligne, la double spirale de l'ouïe du violon, lui-même présent à gauche. Tout ceci fait corps, car le violon est aussi l'instrument qui, à mon oreille tout du moins, est celui qui nous fait entendre les sons les plus purs. Violon, dont un maître fut Paganini, par ailleurs doué pour les mathématiques, mathématiques au profit desquelles le maître Hassler Whitney sacrifia le violon. Notons que l'ouïe du violon est liée tant physiquement que presque mathématiquement aux phénomènes vibratoires.



## 2. Le monde hyperbolique

Soit un randonneur, se promenant par une belle journée ensoleillée, sur le sol d'un domaine de courbure  $-1$  : ce domaine local est celui par exemple d'un col entre deux sommets. La forme locale du domaine est celle d'une selle de cheval ; vous pouvez l'obtenir en sectionnant habilement un hyperboloïde à une nappe :



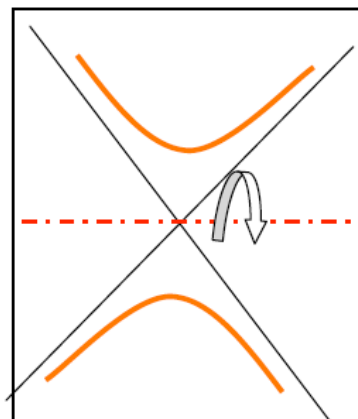
Hyperboloïde à une nappe



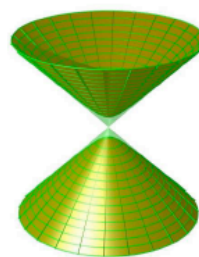
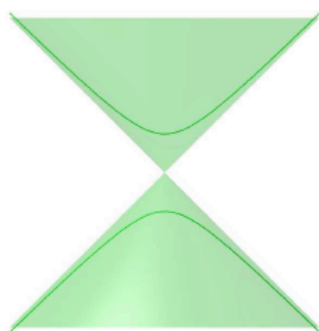
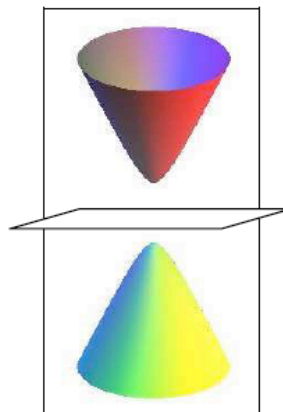
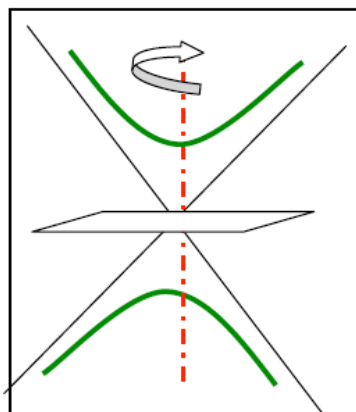
col, selle de cheval

La géométrie sur ce domaine est, rappelons-le, dite hyperbolique.

Un hyperboloïde à une nappe est engendrée par la rotation d'une hyperbole autour de l'axe de symétrie ne la rencontrant pas :



Si l'on fait tourner l'hyperbole, cette fois-ci autour de l'axe de symétrie qui la coupe, on obtient une autre version de l'hyperboloïde appelée l'hyperboloïde à deux nappes :

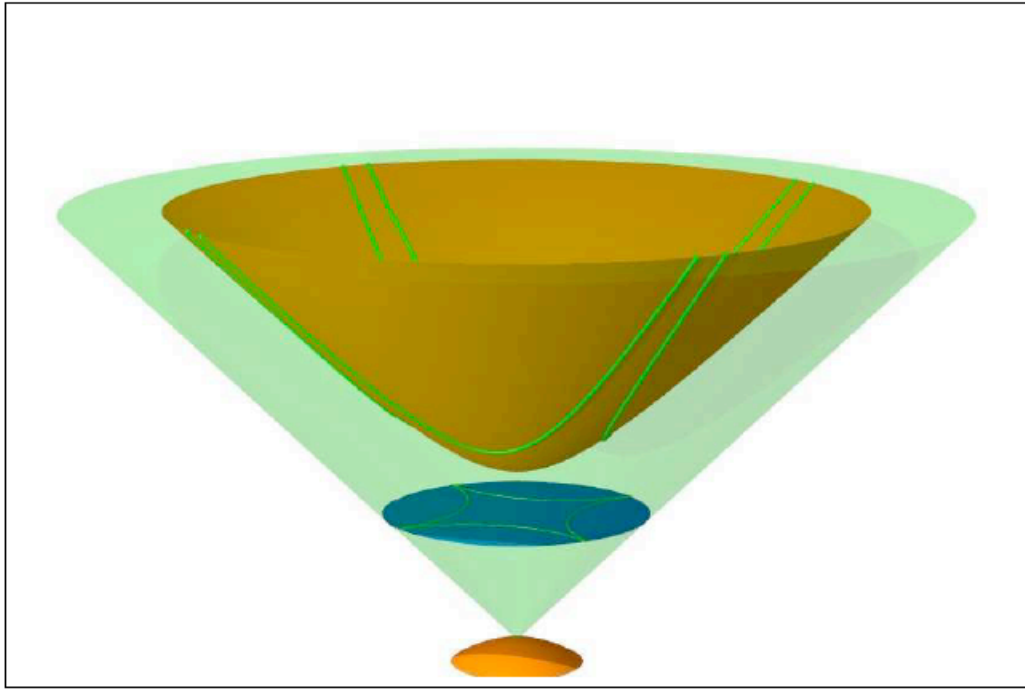


Dessins de Jos Leys

Le plan perpendiculaire à l'axe de rotation et passant par le centre de symétrie est le « plan équatorial » : sur cet l'écran, sur cette toile, sera dessinée, à la manière de Dürer, une image du contenu par exemple de la nappe supérieure rouge de l'hyperboloïde.

Les mathématiciens appellent « *projection stéréographique* » ce procédé. Il consiste à placer une source lumineuse au pôle sud. L'ombre bleue (figure suivante) de la partie supérieure, de la nappe supérieure de l'hyperboloïde sur l'écran est un disque, appelé « *disque de Poincaré* », mais introduit antérieurement par Beltrami.

Une hyperbole, située à l'intersection de l'hyperboloïde et d'un plan passant le centre du disque, a pour ombre dans le disque un cercle ou un segment de droite si le plan passe par l'axe de l'hyperboloïde.



Extrait des ÉLÉMENTS POUR L'ÉTUDE DE FAISABILITÉ ARCHITECTURALE ET MUSÉOGRAPHIQUE du projet ARPAM (1992) :

Le descriptif exact de la coupole et du vitrail sera établi en liaison avec le constructeur. Les indications théoriques suivantes seront utiles: les arcs du vitrail situés sur l'hyperboloïde S sont à l'intersection de celui-ci avec des plans passant par l'origine et d'équation générique :

$$a x + b y + c z = 0.$$

Par projection stéréographique de pôle sud sur le plan horizontal (u,v) passant par l'origine, ces intersections deviennent des cercles d'équation

$$(u + r)^2 + (v + s)^2 = r^2 + s^2 - R^2$$

où  $r = a R/c$  ,  $s = b R/c$  . Ces cercles sont orthogonaux au cercle C qui borde le domaine intérieur D de la projection stéréographique.

D étant muni de la métrique de Poincaré

$$- ds^2 = 4 R^4 (du^2 + dv^2) / (u^2 + v^2 - R^2)^2$$

la longueur hyperbolique de  $OP_0$ , où  $P_0$  de coordonnées (u,0) est l'image d'un point  $M_0$  de S supposé situé dans un plan vertical  $y = 0$ , a pour valeur

$$d = R \text{Log} ((R + u)/(R - u)).$$

Cette longueur d est aussi la longueur euclidienne de l'arc  $OM_0$  tracé sur S.

De manière générale, le point P(u,v) est l'image du point M (x,y,z) où  $x = 2R^2u/(R^2 - u^2 - v^2)$  ; y a la même expression que précédemment où l'on remplace u par v ;  $z = x/u - R$ .

La courbure de l'arc d'hyperbole  $z^2 - x^2 = R^2$  au point (z,x) a pour valeur  $k(z,x) = R^2/(x^2 + z^2)^{3/2}$ .

## Le sentiment de beauté

De manière générale, une œuvre est jugée belle parce qu'elle induit une forme de résonance entre sa structure et celle de notre personne intime, ayant pour signification et pour effet l'accroissement, l'enrichissement de notre stabilité physique et, en l'occurrence, d'abord et surtout psychologique.

On retrouve dans ces deux œuvres les caractéristiques de la plupart des réalisations qui nous inspirent un sentiment de beauté : la présence d'une symétrie, synonyme d'équilibre, d'harmonie, et la répétition d'un motif insolite.

Cette qualité du motif attire notre attention, elle révèle et réveille l'imagination, nous plonge dans un monde quelque peu inhabituel, l'univers du rêve, un monde poétique qui permet de nous évader du quotidien et de ses difficultés, et ainsi nous apporte une détente salutaire.

Quant à la répétition, elle permet d'abord de nous familiariser avec le motif qui, isolé, pourrait paraître trop incongru. Elle crée alors un environnement présentant un caractère de stabilité qui rassure, engendre la confiance, et à son tour détend.

*« D'autre part, étant donné la distinction du bien et du beau (car le premier ne se rencontre jamais que dans le domaine de l'action, tandis que le beau se trouve aussi dans les êtres immobiles), les philosophes qui prétendent que les sciences mathématiques ne font aucune place ni au beau, ni au bien, sont assurément dans l'erreur: le beau est, au contraire, l'objet principal du raisonnement de ces sciences et de leurs démonstrations. Ce n'est pas une raison parce qu'elles ne le nomment pas pour dire qu'elles n'en parlent pas, car elles en montrent les effets et les rapports. Les formes les plus hautes du beau sont l'ordre, la symétrie, le défini, et c'est là surtout ce que font apparaître les mathématiques. Et puisque ces formes (je veux dire l'ordre et le défini) sont manifestement causes d'une multitude d'effets, il est clair que les mathématiciens doivent considérer comme cause d'une certaine manière, la cause dont nous parlons, le beau en un mot. »*

Aristote, **Métaphysique**, M, 3, 1078 a